

Appunti dalle lezioni di Elettricità e Magnetismo¹

Riccardo Borghi

A.A. 2016/2017

¹Aggiornate al 20 giugno 2017

Riccardo Borghi©. Tutti i diritti riservati

Indice

1	Lezione 11 maggio 2017	1
1.1	Forze elettriche	1
1.2	La legge di Coulomb	1
2	Lezione 15 maggio 2017	7
2.1	L'energia di legame di un cristallo ionico: NaCl	7
2.2	Una stima delle dimensioni dell'atomo di idrogeno	12
2.3	Il modello atomico di Rutherford	14
3	Lezione 16 maggio 2017	21
3.1	Il campo elettrostatico	21
3.2	Rappresentazione di un campo vettoriale	24
3.3	Proprietà di un campo vettoriale. Conservatività di \mathbf{E}	27
4	Lezione 17 maggio 2017	31
4.1	Potenziale elettrostatico	31
4.2	L'energia elettrostatica di una sfera carica	35
5	Lezione 18 maggio 2017	39
5.1	Il flusso di un campo vettoriale	39
5.2	Il teorema di Gauss	42
6	Lezione 22 maggio 2017	47
6.1	Equilibrio in un campo elettrostatico	47
6.2	Un'applicazione non convenzionale del teorema di Gauss	49
6.3	Conduttori in elettrostatica	51
6.4	Il teorema di Coulomb	52

6.5	La gabbia di Faraday	55
7	Lezione 24 maggio 2017	57
7.1	Condensatori	57
7.2	L'energia elettrostatica di un condensatore	61
7.3	Potere delle punte	62
8	Lezione 25 maggio 2017	65
8.1	Correnti elettriche	65
8.2	Correnti elettriche nei conduttori: legge di Ohm	69
9	Lezione 29 maggio 2017	73
9.1	Correnti elettriche stazionarie	73
9.2	Azioni meccaniche su correnti	74
9.3	Il moto di una particella in un campo magnetico	76
10	Lezione 30 maggio 2017	79
10.1	Le proprietà del campo magnetico	79
10.2	La legge di Biot-Savart	80
11	Lezione 31 maggio 2017	87
11.1	Il campo magnetico generato da un filo indefinito	87
11.2	La legge di Ampère	90

Capitolo 1

Lezione 11 maggio 2017

1.1 Forze elettriche

Consideriamo una forza simile a quella di gravitazione, ossia che vari predominantemente con l'inverso del quadrato della distanza. Supponiamo altresì che esistano due “specie” di materia, che chiameremo di tipo *positivo* e *negativo*, in modo che i simili si respingano e gli opposti si attraggano. Una simile forza esiste: è la forza *elettrica*. Tutta la materia è un immenso miscuglio di protoni (positivi) ed elettroni (negativi) che si attraggono e respingono tramite questa forza. Il bilanciamento fra elettroni e protoni essi deve essere tuttavia perfetto perché due corpi vicini non risentano di alcuna forza. Sarebbe infatti sufficiente uno sbilanciamento di appena l'1% all'interno di due persone poste a una distanza pari a un braccio per produrre una forza netta risultante sufficiente a sollevare un peso equivalente alla massa della Terra.

1.2 La legge di Coulomb

L'interazione tra due cariche elettriche puntiformi poste in posizioni “fisse” nello spazio vuoto, è governata dalla legge di Charles A. Coulomb. Per illustrarla, descriveremo per sommi capi l'esperienza del celebre ingegnere francese che, dopo aver inventato (indipendentemente dal chimico

inglese J. Priestley) la bilancia di torsione, la utilizzò per effettuare misure quantitative volte alla verifica sperimentale della ben nota legge che porta il suo nome. Sostanzialmente, in una bilancia di torsione (ripor-

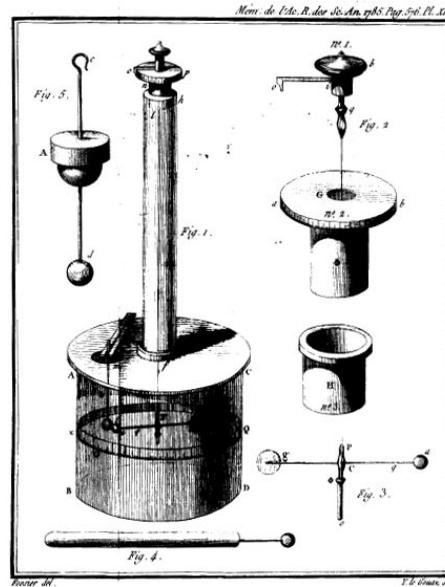


Figura 1.1: La bilancia di torsione di Coulomb (1/2).

tata per esempio nella Fig. 1.1) si effettua la misura dell'azione elettrica (repulsiva o attrattiva) tra due sferette cariche, delle quali una (diciamo la d) è mantenuta in posizione *fissa* e l'altra (diciamo la a) è solidale al giogo di una bilancia, sospeso a sua volta mediante un sottile filo di quarzo (si noti il contrappeso g). La rotazione della bilancia di torsione è invece misurata mediante la graduazione riportata sul diametro del contenitore principale. In Fig. 1.2 è riportata schematicamente la tecnica di misura. Supponiamo che le due sferette d ed a presentino un eccesso di carica dello stesso segno, e poniamo la bilancia nella posizione iniziale indicata dall'angolo α_0 (filo di quarzo *a riposo*). A causa dell'azione elettrica *repulsiva* la sferetta d si muoverà lungo la traiettoria circolare indicata fino a che il momento resistente esercitato dal filo di quarzo uguaglierà in modulo il momento della forza elettrica \mathbf{F} . Dalla Fig. 1.2 non è difficile mostrare che ciò accade quando la seguente condizione è

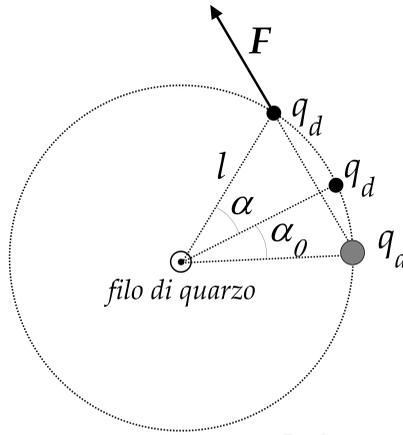


Figura 1.2: La bilancia di torsione di Coulomb (2/2).

verificata :

$$C\alpha = Fl \cos \frac{\alpha + \alpha_0}{2}, \quad (1.1)$$

dove C indica quella che può essere pensata come una sorta di “costante elastica del filo di quarzo. Inoltre, sempre dalla Fig. ??, la distanza fra le due sferette, diciamo r , vale

$$r = 2l \sin \frac{\alpha + \alpha_0}{2}, \quad (1.2)$$

e dunque, misurando il valore di α all’equilibrio e conoscendo la posizione iniziale α_0 della bilancia, si ricava la coppia (F, r) . Ripetendo la misura per diversi valori di α_0 , e per diversi valori iniziali degli eccessi di carica depositati sulle sferette Coulomb fu in grado di stabilire quantitativamente l’omonima legge. Consideriamo dunque lo schema rappresentato nella Fig. 1.3, dove due cariche “puntiformi”, diciamo q_1 e q_2 , la cui reciproca posizione è rappresentata dal vettore \mathbf{r}_{12} , interagiscono attraverso la coppia di forze (uguali e contrarie) \mathbf{F}_{21} e \mathbf{F}_{12} definite come segue:

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12} = k_0 \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{\mathbf{r}}_{12}, \quad (1.3)$$

dove la presenza del versore $\hat{\mathbf{r}}_{12}$ sta a indicare che le forze sono parallele alla congiungente le due cariche. Occorre notare come tale direzione sia

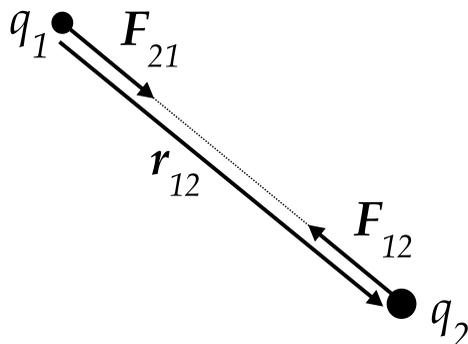


Figura 1.3: La legge di Coulomb.

l'unica possibile, a meno che lo spazio non goda di qualche proprietà direzionale intrinseca. Con due sole cariche immerse in uno spazio vuoto e isotropo nessun'altra direzione potrebbe infatti essere univocamente assegnata. Se tuttavia una delle cariche possedesse una qualche struttura interna, allora per descriverne gli effetti non sarebbe più sufficiente caratterizzarla attraverso la semplice quantità scalare q . Vedremo in seguito un esempio parlando del *dipolo elettrostatico*.

La presenza della costante k_0 nella legge di Coulomb (1.3) tiene conto delle unità di misura impiegate per definire le grandezze fisiche coinvolte. Nel Sistema Internazionale, dove la carica è espressa in coulomb e le distanze in metri, la forza risultante è espressa in newton a patto che k_0 assuma un ben preciso valore numerico, pari a circa 9×10^9 .¹

L'unità di misura nel S.I. della quantità di carica elettrica è invece il Coulomb (simbolo C) che, si badi bene, *non è* l'unità di misura fondamentale delle grandezze elettriche, rappresentata invece dall'ampere (A), che misura l'intensità di corrente. Il valore numerico di k_0 fornisce un'idea quantitativa di quanto le forze elettriche siano di diversi ordini di grandezza superiori rispetto alle forze gravitazionali. Per rendercene conto consideriamo il modello più semplice dell'atomo di idrogeno, costituito da un protone e un elettrone. Dette m_p ed m_e rispettivamente la massa del protone e dell'elettrone, calcoliamo il rapporto tra il

¹Una stima più precisa di k_0 dà $8.9875 \dots \times 10^9$. Tuttavia il valore approssimato succitato è comodo per ottenere stime approssimate senza l'utilizzo della calcolatrice.

modulo della reciproca attrazione coulombiana, diciamo F_e , e quello dell'attrazione gravitazionale, diciamo F_g . Con semplici passaggi abbiamo

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{k_0 e^2}{G m_p m_e} \sim \frac{10^{10} 10^{-38}}{10^{-11} 10^{-27} 10^{-30}} = 10^{40}. \quad (1.4)$$

L'atomo di Bohr è schematizzato nella Fig. 1.4. L'elettrone si muove su un'orbita circolare di raggio a_B (il cosiddetto *raggio di Bohr*) sotto l'azione della sola attrazione coulombiana. È interessante notare come

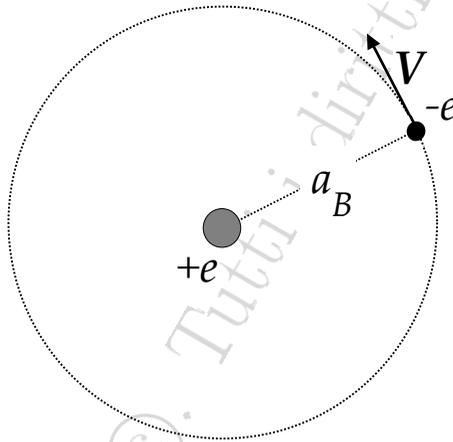


Figura 1.4: L'atomo di Bohr.

tramite questo modello sia in linea di principio possibile stimare l'energia meccanica che tiene insieme l'atomo secondo la formula già vista nel caso del moto orbitale di un satellite attorno la Terra,

$$E \simeq -\frac{k_0 e^2}{2a_B}, \quad (1.5)$$

che, tenendo conto che $2a_B \simeq 10^{-10}$ m, dà

$$E \simeq -\frac{9 \times 10^9 1.6 \times 10^{-19}}{10^{-10}} 1.6 \times 10^{-19} \text{ J} \simeq 14 \text{ eV}, \quad (1.6)$$

dove abbiamo introdotto l'unità di misura energetica detta *elettron-volt*, numericamente pari a circa 1.6×10^{-19} J.

Capitolo 2

Lezione 15 maggio 2017

2.1 L'energia di legame di un cristallo ionico: NaCl

Partiamo da un numero, noto in chimica, che rappresenta l'energia di dissociazione di un cristallo di cloruro di sodio (il comune sale da cucina). Questo numero, ottenuto tramite misure sperimentali, risulta essere

$$W = 787 \text{ kJ/mole.} \quad (2.1)$$

Tenendo conto che all'interno di una mole ci sono N_a molecole (dove $N_a \simeq 6.02 \cdot 10^{23}$ è il numero di Avogadro), possiamo stimare l'energia per molecola in circa $1.27 \cdot 10^{-18}$ J/molecola. Ipotizzando che la natura del legame ionico sia *essenzialmente* elettrostatica, possiamo costruire un modello elettrico del cristallo NaCl che ci permetta di ricavare una buona approssimazione di W ? Un modello di prima approssimazione è costituito dalla ripetizione periodica, nelle tre direzioni dello spazio, di un cubo, di lato a , nei cui vertici siano disposte alternativamente cariche elementari positive (gli ioni Na^+) e negative (gli ioni Cl^-), secondo quanto schematizzato in Fig. 2.1. Una struttura del genere si chiama *reticolo cubico*. Il *passo* del reticolo, ossia il parametro a , è stato misurato e vale circa 2.81 Å. Questa schematizzazione può sembrare alquanto brutale,

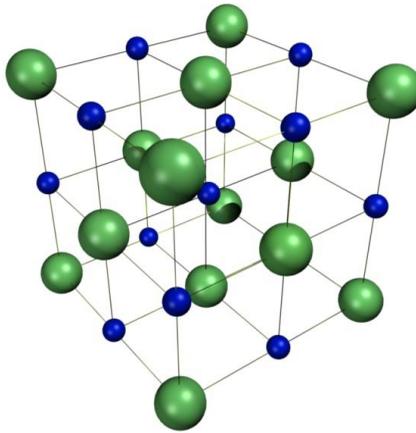


Figura 2.1: Il reticolo cubico del cristallo di NaCl. Le sfere verdi rappresentano gli ioni cloro, quelle blu gli ioni sodio.

in quanto gli ioni non sono cariche perfettamente puntiformi, ma piuttosto sono assimilabili a distribuzioni di carica quasi sferiche. Tuttavia le azioni elettriche esercitate da una distribuzione di carica sferica sono equivalenti a quelle che si avrebbero se tutta la carica fosse concentrata nel centro di simmetria della distribuzione che, nel caso in esame, coincide con la posizione reticolare. È l'analogo elettrostatico del celebre "teorema superbo" già incontrato nel caso della forza gravitazionale.

Ciò premesso, l'energia di dissociazione del nostro cristallo può essere calcolata semplicemente sommando le energie elettrostatiche associate a ciascuna delle possibili coppie di cariche che costituiscono il cristallo stesso. Allo scopo utilizzeremo semplicemente l'espressione dell'energia potenziale per una singola coppia di cariche, diciamo q_1 e q_2 , poste ad una reciproca distanza d ,

$$U = k_0 \frac{q_1 q_2}{d}. \quad (2.2)$$

Si tratta dunque di organizzare questa somma seguendo delle regole di buon senso. Prima di questo, però, vediamo cosa fornisce numericamente la (2.2) quando si consideri una singola coppia di ioni Na^+ e Cl^- , *isolata* dal resto del cristallo. Indicando con $-U_0$ l'energia di tale coppia

abbiamo

$$U_0 = k_0 \frac{e^2}{a} \simeq \frac{9 \times 10^9 \times (1.6 \times 10^{-19})^2}{2.81 \times 10^{-10}} \text{ J} \simeq 8.2 \cdot 10^{-19} \text{ J}, \quad (2.3)$$

che, sebbene sia circa una volta e mezzo più piccolo dell'energia desiderata, rappresenta un risultato dello stesso ordine di grandezza. Siamo dunque sulla strada giusta.

Proviamo adesso a “costruire” il reticolo, partendo dalla singola molecola. Cominceremo con gli ioni che si trovano sulla stessa linea orizzontale. Aggiungendo di volta in volta uno ione, dovremo valutare l'energia totale applicando la (2.2) a *tutte* le coppie di ioni presenti. Inoltre, poiché le mutue distanze fra tali coppie saranno multipli interi del passo reticolare a , appare chiaro che questa energia sarà facilmente espressa in termini di U_0 . In altri termini, assumeremo come unità di misura per le lunghezze il parametro a , mentre l'unità di misura energetica sarà U_0 . Nella Fig. 2.2 è schematizzato il processo di costruzione della prima fila del reticolo. Proviamo a calcolare l'energia di legame le prime iterazioni. Con 2 soli ioni l'energia è -1. Aggiungendo un terzo

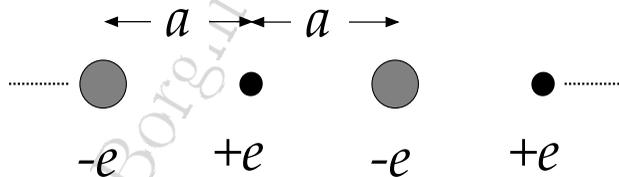


Figura 2.2: Costruzione del reticolo di NaCl: prima fila.

ione (+), dobbiamo valutare l'energia che compete a ciascuna coppia e sommare. In questo caso abbiamo 2 coppie aventi energia -1 ed una coppia avente energia +1/2. L'energia totale vale dunque $-2+1/2=-3/2$.

Aggiungiamo adesso uno ione $-$. Avremo 3 coppie aventi energia -1 , 2 coppie aventi energia $+1/2$ e 1 coppia avente energia $-1/3 \simeq -0.33$. L'energia totale vale $-3 + 2/2 - 1/3 = -2 - 1/3 \simeq -2.33$. In questo caso però abbiamo costruito 2 molecole di NaCl, cosicché l'energia per molecola diventa $-2.33/2 \simeq -1.17$. Adesso il gioco è chiaro: supponiamo di aver costruito una fila di N molecole. Ci servono $2N$ ioni, disposti come nella Fig. 2.2. Andiamo a vedere l'energia totale in questo caso. Seguendo il ragionamento precedente avremo $2N \times (-1) + (2N - 1) \times (+\frac{1}{2}) + (2N - 2) \times (-\frac{1}{3}) + \dots$, che può essere scritta come

$$2N \left[-1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2N} \right) - \frac{1}{3} \left(1 - \frac{2}{2N} \right) + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{3}{2N} \right) + \dots \right]. \quad (2.4)$$

L'energia di legame *per molecola* si ottiene dividendo la (2.4) per il numero di molecole, cioè N . Se inoltre pensiamo al reticolo indefinito è evidente che dovremo effettuare un passaggio al limite per $N \rightarrow \infty$, che dà

$$-2 \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \right). \quad (2.5)$$

Dunque l'energia per molecola all'interno di una singola fila è espressa attraverso serie infinita, ottenuta a partire dalla serie armonica, notoriamente *divergente*, e cambiando il segno dei termini alternativamente. È proprio tale cambiamento di segno che rende la serie convergente. Tuttavia, il calcolo numerico della somma risulta problematico, essendo la serie "lentamente" convergente. Proviamo a calcolarne la somma ricorrendo a un trucco. Prendiamo la funzione $\log(1+x)$, e costruiamone lo sviluppo in serie di Taylor di punto iniziale $x=0$. Facendo i conti otteniamo facilmente

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad (2.6)$$

che, calcolato per $x=1$, fornisce

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \log 2 \simeq 0.69. \quad (2.7)$$

Sostituendo questo valore nella (2.5), e tenendo conto della (2.3), otteniamo un valore dell'energia di legame relativa alla prima fila pari a circa

$1.14 \cdot 10^{-18}$ J, che risulta minore del risultato sperimentale per circa di circa un 10%. Questo risultato fa riferimento a un modello troppo semplificato del cristallo. Un risultato più accurato lo si potrebbe ottenere tenendo per esempio conto degli effetti elettrostatici dovuti alle file di ioni *adiacenti* a quella appena considerata, che sono quattro: sopra, sotto, davanti e dietro. Nella Fig. 2.3 è mostrata schematicamente la posizione di una di queste file. Ora, senza ripetere i conti svolti precedentemente,

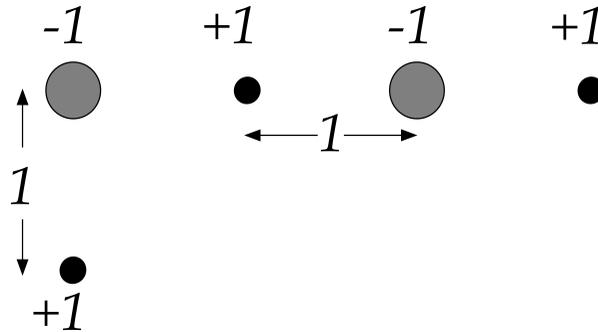


Figura 2.3: Costruiamo il reticolo di NaCl: una delle file adiacenti.

si trova facilmente che la correzione all'energia di legame dovuta a una di queste file può essere scritta come¹

$$-2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{10}} + \dots \right). \quad (2.8)$$

Purtroppo la somma della serie fra parentesi non può essere valutata analiticamente. Operando per via numerica, otteniamo

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{10}} + \dots \simeq 0.059, \quad (2.9)$$

che, tramite la (2.8), fornisce una *correzione* all'energia di legame pari a circa $3.87 \cdot 10^{-19}$ J. Dunque, alla fine del calcolo, l'energia *totale* è

¹Il lettore lo dimostri.

diventata pari a $1.14 \cdot 10^{-18} + 3.87 \cdot 10^{-19} \simeq 1.53 \cdot 10^{-18}$ J, questa volta superiore del 20 % rispetto al valore misurato sperimentalmente. Ormai dovrebbe essere chiaro il trucco: aggiungendo il contributo dovuto alle varie file, si otterranno di volta in volta delle correzioni (di segno alterno) al valore dato dalla (2.5). Il calcolo va ripetuto per tutte le possibili file che compongono il reticolo cristallino. Se si porta a termine con un po' di pazienza il calcolo, si ottiene per l'energia totale un valore pari a $1.747 U_0 \simeq 1.43 \cdot 10^{-18}$ J, che è superiore di circa il 12 % rispetto al valore misurato sperimentalmente.

2.2 Una stima delle dimensioni dell'atomo di idrogeno

Nel modellino "classico" dell'atomo di idrogeno un elettrone si muove attorno al nucleo (costituito da un protone) su un'orbita approssimativamente circolare, come in un sistema solare in miniatura. Tenendo conto del fatto che la massa del protone è circa 2000 volte maggiore di quella dell'elettrone, possiamo ragionevolmente supporre che il nucleo sia fermo. L'elettrone è soggetto alla forza di attrazione gravitazionale dovuta alla presenza del protone e alla forza di attrazione coulombiana. Sappiamo che il rapporto tra queste due forze è dell'ordine di 10^{-40} , così nel seguito trascureremo il contributo della forza gravitazionale. Il modello appena descritto in realtà non può funzionare. L'elettrone, compiendo il suo moto circolare uniforme, perderebbe energia sotto forma di onde elettromagnetiche e cadrebbe inesorabilmente sul nucleo seguendo una traiettoria a spirale. Ciò contraddice la realtà, poichè la maggior parte degli atomi, e quello di idrogeno in particolare, sono stabili. La ragione per cui l'elettrone non cade sul nucleo è di natura prettamente quantistica, e ci accingiamo a spiegarla seguendo un elegante ragionamento dimensionale dovuto a R. P. Feynman.

Supponiamo dunque che l'elettrone si muova seguendo un'orbita stazionaria di raggio a . Se facciamo degli esperimenti, vedremo l'elettrone in posizioni differenti ogni volta che proviamo a rilevare la sua presenza. Indichiamo con Δx l'incertezza sulla sua posizione. Sembra ragionevole supporre che tale incertezza sia dell'ordine del raggio a , $\Delta x \simeq a$. Ora, accade qualcosa di incomprensibile: se l'elettrone collassasse sul nucleo,

nel fare questo la sua localizzazione spaziale aumenterebbe (ossia diminuisce Δx). Ebbene, secondo i principi della meccanica quantistica, maggiore è la localizzazione spaziale dell'elettrone, minore sarà la localizzazione per ciò che riguarda la sua quantità di moto. In particolare, indicando con Δp l'incertezza sulla quantità di moto, dal *principio di indeterminazione* abbiamo $\Delta p \simeq \hbar/\Delta x$, dove \hbar rappresenta un parametro, detto *costante di Planck*, il cui valore è approssimativamente 10^{-34} J·s. In altre parole, più l'elettrone si trova vicino al nucleo, più la sua quantità di moto aumenta. Calcoliamo allora l'energia *meccanica* totale associata all'elettrone, diciamo E , pari alla somma dell'energia potenziale di due cariche puntiformi (di segno contrario) poste alla reciproca distanza a e dell'energia cinetica dell'elettrone che, per quanto detto precedentemente, possiamo stimare in $(\hbar/a)^2/(2m_e)$. Abbiamo allora

$$E = \frac{\hbar^2}{2m_e a^2} - \frac{k_0 e^2}{a}. \quad (2.10)$$

Notiamo come, per $a \rightarrow \infty$, il valore dell'energia sia dominato dal termine (negativo) dell'energia potenziale. Al contrario, per $a \rightarrow 0$, il termine cinetico domina e l'energia diverge verso $+\infty$. Nella Fig. 2.4 è mostrato il grafico di E in funzione della distanza a . Si vede chiaramente la pre-

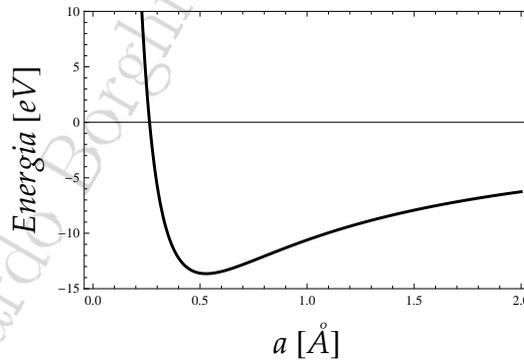


Figura 2.4: L'energia meccanica totale del modello “quantistico” dell'atomo di idrogeno.

senza di un minimo dell'energia in corrispondenza di un preciso valore,

diciamo a_0 , del raggio dell'atomo. Tale valore può essere determinato semplicemente imponendo l'annullamento della derivata prima, cioè $dE/da = 0$. In formule,

$$0 = \left. \frac{dE}{da} \right|_{a=a_0} = -\frac{\hbar^2}{m_e a_0^3} + \frac{k_0 e^2}{a_0^2}, \quad (2.11)$$

che fornisce per a_0 il valore seguente:

$$a_0 = \frac{1}{k_0} \frac{\hbar^2}{m_e e^2} \simeq 0.5 \cdot 10^{-10} \text{ m}, \quad (2.12)$$

Nonostante il ragionamento sia tutt'altro che rigoroso, per una coincidenza numerica il nostro a_0 è conosciuto in fisica con un nome ben preciso: si tratta del celebre *raggio di Bohr*. L'espressione (2.12) rappresenta, a parte il fattore k_0 dipendente dal sistema di unità di misura, una “fortunata” combinazione di costanti fondamentali (la costante di Planck, la massa dell'elettrone, la carica dell'elettrone) che, disposte in modo tale da fornire una grandezza avente le dimensioni di una lunghezza, forniscono proprio il “raggio” dell'atomo di idrogeno. È interessante valutare l'energia meccanica in corrispondenza di questo raggio. Sostituendo a_0 nella (2.10), si ottiene un valore pari a

$$E_{\min} = -k_0^2 \frac{m e^4}{2 \hbar^2} \simeq -13.6 \text{ eV}. \quad (2.13)$$

Il fatto che questa energia risulti *negativa* significa che l'elettrone ha un'energia minore quando è nell'atomo rispetto a quella che avrebbe fuori dall'atomo ($E \rightarrow 0$ se $a \rightarrow \infty$). Ciò comporta che gli elettroni vogliono stare negli atomi, piuttosto che andarsene in giro. Inoltre, il valore numerico fornito dalla (2.13) coincide esattamente con il valore sperimentale ottenuto per ionizzare (ossia per strappare al nucleo il suo elettrone orbitante) l'atomo di idrogeno, ossia rappresenta correttamente l'energia di legame. Esso costituisce una unità di misura energetica che prende il nome di Rydberg.

2.3 Il modello atomico di Rutherford

Un problema che la fisica classica non permetteva di risolvere ha a che fare con la struttura atomica e le proprietà di radiazione degli atomi. Una

stima grossolana ma significativa delle dimensioni medie di un atomo si può fare partendo dal fatto che la densità della stragrande maggioranza di solidi e liquidi è dell'ordine del grammo per centimetro cubo. Ora un grammo, e dunque un centimetro cubo, di materia contiene un numero di atomi dell'ordine del numero di Avogadro, ossia 10^{23} . Assumendo che gli atomi siano posizionati gli uni accanto agli altri possiamo stimare l'ordine di grandezza della dimensione atomica come la radice cubica di 10^{-23} cm^3 , ossia circa 10^{-8} cm . Questo spiega perché l'unità naturale per la misura delle dimensioni atomiche sia l'Å. La fisica classica non è in grado di fornire una ragionevole spiegazione teorica del perché. Ma c'è di più.

Nel 1911 Ernst Rutherford propose una rivoluzionaria teoria² per spiegare i risultati di alcune misure condotte due anni prima da due suoi studenti, H. Geiger ed E. Marsden,³ allo scopo di verificare l'ipotesi atomica di J. J. Thomson. Nell'esperimento, schematizzato in Fig. 2.5, un

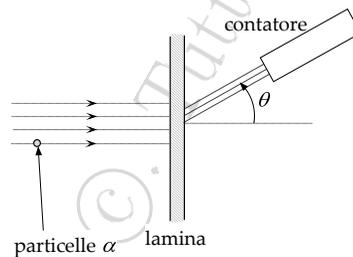


Figura 2.5: L'esperimento di Geiger e Marsden.

fascio di particelle α (nuclei di elio) viaggia verso una lamina d'oro posta ortogonalmente alla direzione del fascio. Tramite un contatore posto al di là della lamina si misura il numero di particelle deflesse rispetto alla direzione d'incidenza di un angolo θ . Secondo il modello di Thomson, l'atomo è pensato come una sfera di carica positiva (uniformemente distribuita nel volume) con gli elettroni all'interno mantenuti in moto da forze di natura elettrostatica. In base a tale modello ci si aspetta che la distribuzione delle particelle α sia concentrata essenzialmente nell'intor-

²E. Rutherford, "The scattering of α and β particles by matter and the structure of the atom," *Philosophical Magazine* vol. 21, pp. 669 - 688 (1911).

³H. Geiger and E. Marsden, "On a diffuse reflection of the α -particles," *Proceedings of the Royal Society of London A* vol. 82, pp. 495 - 500 (1909).

no della direzione $\theta = 0$. Ancora una volta i risultati delle misure erano fortemente in disaccordo con le previsioni teoriche basate sull'ipotesi di Thomson. Ernst Rutherford analizzò attentamente le misure effettuate dai suoi allievi e derivò da esse un modello atomico completamente differente da quello di Thomson. In sostanza il modello di Rutherford assimila l'atomo a un minuscolo sistema planetario. Al centro c'è il nucleo, che contiene praticamente tutta la massa dell'atomo, attorno al quale, attratti dalla forza coulombiana, gravitano gli elettroni come pianeti intorno al Sole.

È interessante ripercorrere l'analisi di Rutherford che, si badi bene, è basata sulle leggi classiche della meccanica e dell'elettromagnetismo. In Fig. 2.6 è schematizzata la geometria del problema. Supponiamo che

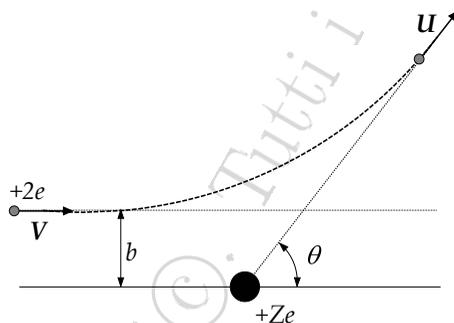


Figura 2.6: La geometria usata da Rutherford.

una particella α venga lanciata con velocità \mathbf{V} verso un nucleo di carica $+Ze$, dove Z è il numero atomico, posto a grande distanza. Nel caso dell'esperimento di Rutherford $Z = 79$ (la lamina era d'oro). Indichiamo con b il cosiddetto *parametro d'impatto*, ossia la distanza fra la direzione della velocità della particella α e il nucleo d'oro. Sappiamo che l'accelerazione impressa da questo alla particella varia proporzionalmente all'inverso del quadrato della distanza (legge di Coulomb). A causa della continua repulsione la particella compie la traiettoria (iperbolica) indicata in figura dalla curva tratteggiata fino a raggiungere uno stato di moto rettilineo uniforme con la velocità \mathbf{U} in corrispondenza dell'angolo di deflessione θ . Sebbene il problema sia, in linea di principio, risolvibile abbastanza facilmente, vogliamo qui proporre un'interessante trattazio-

ne euristica nel limite di piccoli angoli di deflessione che si trova nelle celebri lezioni di Feynman.

Per la seconda legge della dinamica il prodotto della forza per la durata dell'intervallo temporale in cui essa agisce corrisponde alla variazione della quantità di moto $\Delta \mathbf{P}$,

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \implies \Delta \mathbf{p} = \int \mathbf{F} dt. \quad (2.14)$$

Dividendo il modulo di questo incremento per la quantità di moto iniziale mV si otterrà infine l'angolo di deflessione.

La linea di ragionamento proposta da Feynman consiste nel supporre che la forza di repulsione elettrostatica esercitata dal nucleo di oro sulla particella α agisca solamente per un intervallo di tempo limitato, diciamo Δt , proporzionale alla distanza di minimo avvicinamento tra le due cariche, misurata dal parametro d'impatto b , come mostrato schematicamente nella Fig. 2.7.

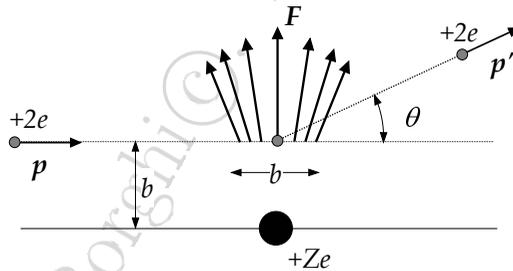


Figura 2.7: Una possibile approssimazione per il calcolo dell'angolo di diffusione.

In altri termini, invece di considerare l'azione repulsiva agente in maniera continua, si pensa che essa sia "spenta" per tutta la durata del moto della particella tranne che nei punti di un intervallo spaziale, grosso modo delle dimensioni di b , dove la forza repulsiva è "accesa" al massimo livello e spinge la particella in direzione ortogonale a quella iniziale di moto. In quest'approssimazione l'incremento totale della quantità

di moto si può stimare facilmente ipotizzando che la forza coulombiana agisca prevalentemente nella direzione verticale ovvero, utilizzando la (2.14),

$$\Delta p \simeq F \Delta t \sim k_0 \frac{2Ze^2}{b^2} \frac{b}{V} = k_0 \frac{2Ze^2}{Vb}. \quad (2.15)$$

L'angolo di deflessione si potrà quindi ricavare in base a semplici considerazioni trigonometriche. In particolare, dalla Fig. 2.8 abbiamo infatti

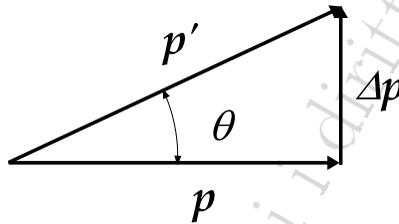


Figura 2.8: Stima dell'angolo di diffusione.

$$\tan \theta \simeq \frac{\Delta p}{p} = k_0 \frac{2Ze^2}{mV^2 b}. \quad (2.16)$$

Si può dimostrare che l'esatta relazione tra θ e b è molto simile alla (2.16), e precisamente si ha:

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{2k_0Ze^2}{bmV^2}. \quad (2.17)$$

Notiamo subito la proporzionalità inversa fra il parametro d'impatto e l'angolo di deflessione. È altresì evidente come minore è il parametro d'impatto, più vicino la particella arriverà al nucleo e maggiore sarà l'azione repulsiva di quest'ultimo. Possiamo già utilizzare la (2.17) per ottenere una stima grossolana delle dimensioni nucleari sostituendo alle grandezze presenti nel secondo membro i corrispondenti valori degli ordini di grandezza numerici. Abbiamo, esprimendo tutte le grandezze nelle unità del S.I.,

$$\tan \frac{\theta}{2} \sim \frac{10^{10} \times 10^2 \times 10^{-38}}{b \times 10^{-27} \times 10^{14}} = \frac{10^{-13}}{b}, \quad (2.18)$$

da cui si evince come b potrebbe, in linea di principio, assumere valori anche dell'ordine di $10^{-14} - 10^{-15}$ m.

Una stima più precisa delle dimensioni nucleari si può ottenere, sempre dalla (2.17) calcolando, per fissati valori del parametro d'impatto e dell'energia cinetica iniziale della particella α , la *minima* distanza dal nucleo raggiunta dalla particella durante il suo moto. Il calcolo si riduce a un banale problema di meccanica del punto e si trova che la distanza minima, diciamo D , è pari a⁴

$$D = \frac{2k_0Ze^2}{mV^2} \frac{1 + \sin \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \quad (2.19)$$

Tenendo conto che l'energia tipica delle particelle α utilizzate nell'esperimento di Geiger e Mardsen è pari a circa 5 MeV e che furono misurati angoli di deflessione sino a $150^\circ \simeq 2.6$ rad, la (2.19) fornisce per D la seguente stima:

$$D \simeq \frac{9 \times 10^9 \times 79 \times (1.6 \times 10^{-19})^2}{5 \times 10^6 \times 1.6 \times 10^{-19}} \frac{1 + \sin 1.3}{\sin 1.3} \simeq \boxed{5 \times 10^{-14} \text{ m}} \quad (2.20)$$

che conferma dunque la stima grossolana ottenibile dalla (2.18).

⁴L'esercizio è lasciato per esercizio al lettore.

Capitolo 3

Lezione 16 maggio 2017

3.1 Il campo elettrostatico

Vogliamo adesso affrontare lo studio dei fenomeni elettrici cambiando radicalmente la metodologia rispetto a quanto precedentemente fatto per quanto concerne la meccanica. A questo scopo introdurremo il concetto di *campo elettrostatico*. Consideriamo per semplicità ancora una volta il modello elementare dell'atomo di idrogeno precedentemente utilizzato: un elettrone e un protone che interagiscono tramite la reciproca attrazione coulombiana. Sappiamo che il protone ha una massa circa duemila volte maggiore a quella dell'elettrone. Ciò implica che, con buona approssimazione, potremmo studiare l'atomo di idrogeno nel sistema di riferimento in cui il protone è in quiete. In tale sistema di riferimento, l'elettrone (pensando allo stato fondamentale) si muove lungo un'orbita circolare a una distanza dal nucleo pari al raggio di Bohr, come mostrato nella Fig. 3.1.

In altri termini, possiamo considerare protone ed elettrone come attori che svolgono ruoli sostanzialmente diversi. Il protone svolge un ruolo "attivo", laddove l'elettrone si muove "passivamente" sotto l'influenza del primo. Una possibile analogia è quella col caso gravitazionale, dove la Terra si muove attorno al Sole che rimane sostanzialmente "fermo", incurante dell'azione attrattiva esercitata dal nostro pianeta. In questo caso

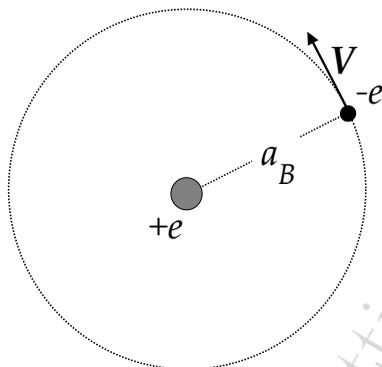


Figura 3.1: L'atomo di Bohr.

parleremo del moto della Terra nel “campo gravitazionale generato dal Sole”. Analogamente è naturale pensare che l'elettrone si muova a caso del “campo elettrico generato dal protone”.

Supponiamo di avere una carica puntiforme $Q > 0$ posta in una posizione *fissa* dello spazio e di non essere interessati alle forze che la mantengono in tale posizione, ma unicamente all'effetto che essa produrrebbe su un'altra carica, diciamo q , posta in corrispondenza della prima. È chiaro che tale effetto è rappresentato dalla forza \mathbf{F} agente su q , data dalla legge di Coulomb,

$$\mathbf{F} = k_0 \frac{qQ}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (3.1)$$

dove \mathbf{r} è il segmento orientato che specifica la posizione rispetto a Q del punto in cui si trova la carica q . Possiamo interpretare la (3.1) come una particolare legge di forza che, utilizzata all'interno della seconda legge della dinamica $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$, permette in linea di principio di determinare il moto risultante della carica q .

La forza esercitata sulla carica q si può anche riscrivere nel seguente modo:

$$\mathbf{F} = q \left(k_0 \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \right) = q \mathbf{E}, \quad (3.2)$$

dove il vettore \mathbf{E} è definito da

$$\mathbf{E} = k_0 \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (3.3)$$

Vediamo come, secondo questa interpretazione, la forza è data dal prodotto di due grandezze ciascuna facente riferimento a una delle due cariche. In particolare, il vettore \mathbf{E} , che è una *funzione della posizione*, appare essere una caratteristica della sola carica Q . Chiameremo \mathbf{E} il *campo elettrico* prodotto da Q .

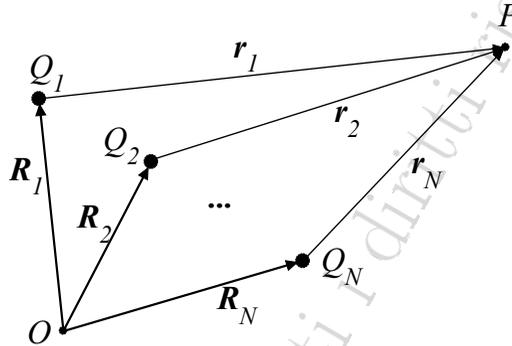


Figura 3.2: Il campo elettrico generato da N cariche sorgenti.

Se, in luogo di una carica, avessimo N cariche, diciamo $\{Q_j\}_{j=1}^N$, disposte in corrispondenza di altrettante posizioni fisse dello spazio $\{R_j\}_{j=1}^N$, come schematizzato nella Fig. 3.2, il campo elettrostatico nel punto P sarebbe dato dalla *sovrapposizione* dei campi elettrici generati da ciascuna carica sorgente indipendentemente dalla presenza delle altre, ossia

$$\mathbf{E}(P) = k_0 \sum_{j=1}^N \frac{Q_j}{r_j^2} \hat{\mathbf{r}}_j. \quad (3.4)$$

Fin qui, niente di veramente nuovo. Il campo elettrico così definito è semplicemente un altro modo per descrivere gli effetti di un sistema di cariche su altre cariche. In altri termini, si suppone che la presenza delle cariche sorgenti modifichi le proprietà dello spazio in modo tale che se una carica “esploratrice” q , che chiameremo carica di prova, si trovasse a passare di lì subirebbe l’azione della forza $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$. In altri termini, diciamo che il campo elettrico sussiste indipendentemente dalla presenza o meno della carica di prova, fintantoché quest’ultima non è in grado di perturbare, con la sua presenza, la distribuzione delle sorgenti. D’ora in avanti supporremo che tale ipotesi sia sempre verificata.

Il campo elettrico associa a ogni punto dello spazio una proprietà locale: se conosciamo il valore di \mathbf{E} in una piccola regione, potremo conoscere senza bisogno di altre informazioni, che cosa accadrà a una qualsiasi carica posta in quella zona. È importante sottolineare come non vi sia alcun bisogno di sapere che cos'ha generato il campo elettrico, ossia la disposizione delle cariche sorgenti. Viceversa, la conoscenza dei valori del campo in tutti i punti dello spazio dà la descrizione completa dell'intero sistema. Inoltre dalla conoscenza del campo è sempre possibile, in linea di principio, risalire alla distribuzione delle cariche che l'hanno generato.

3.2 Rappresentazione di un campo vettoriale

Un campo vettoriale può essere pensato come una funzione vettoriale di punto: a ogni terna di numeri reali (x, y, z) (le coordinate cartesiane di un punto dello spazio) è univocamente associato un vettore, per esempio tramite le sue componenti cartesiane. Così un generico campo elettrostatico sarà rappresentato dalla terna di funzioni $\{E_x(x, y, z), E_y(x, y, z), E_z(x, y, z)\}$. Una tale rappresentazione, sebbene piuttosto astratta, è anche la più completa. Tuttavia, spesso una conoscenza analitica è praticamente impossibile da ottenere, specialmente quando la distribuzione della carica sorgente è non banale o addirittura ignota a priori (come accade per esempio nel caso di due o più conduttori interagenti). In generale è possibile farsi un'idea intuitiva delle proprietà di un campo vettoriale attraverso opportune rappresentazioni grafiche. Una delle più semplici e immediate da rammentare consiste nel tracciare in diversi punti dello spazio un segmento orientato la cui direzione coincida con quella del campo e la cui lunghezza sia proporzionale al suo modulo. Se i punti sono scelti sufficientemente vicini tra loro, le varie frecce tracciate a ognuno di essi andranno a “fondersi” formando così una curva in ogni punto della quale il campo vettoriale risulterà ad essa tangente, come schematizzato nella Fig. 3.3. Per avere un'idea, seppur grossolana, del modulo del campo, si conviene di assumere la lunghezza del vettore proporzionale alla *densità* delle linee di forza, come si può vedere nella stessa Fig. 3.3.

Le linee di forza di un campo elettrostatico sono curve regolari e continue, eccezion fatta per alcuni punti singolari, che coincidono con

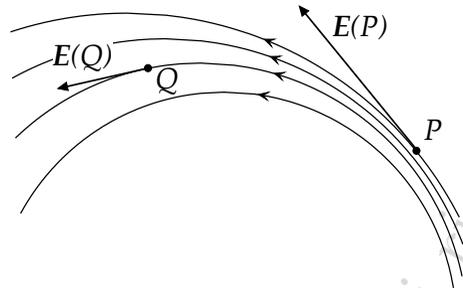


Figura 3.3: Un campo vettoriale può essere rappresentato tracciando le linee di forza, tangenti alla direzione del campo vettoriale in ogni punto.

le posizioni occupate dalle cariche generatrici. A titolo di esempio in Fig. 3.4 abbiamo disegnato le linee di forza del campo elettrostatico generato da una singola carica positiva (a) o negativa (b) che, utilizzando la (3.1), sono semirette rispettivamente uscenti dalla ovvero entranti nella carica stessa.

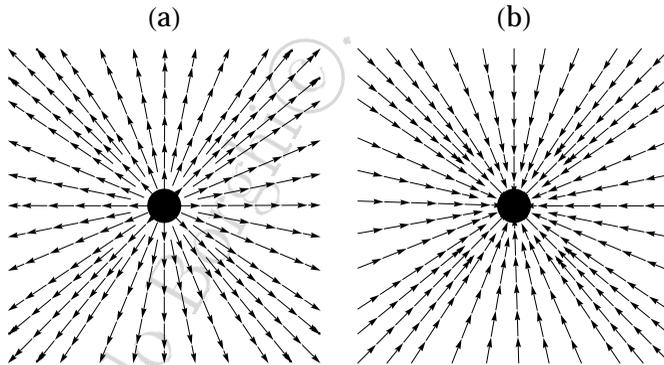


Figura 3.4: Linee di forza del campo elettrostatico generato da una singola carica positiva (a) o negativa (b).

Nella Fig. 3.5 invece abbiamo disegnato alcune linee di forza del campo prodotto da una distribuzione di una carica $+3$ e una carica -1 , in opportune unità.

Come ulteriore esempio di campo vettoriale, consideriamo un corpo

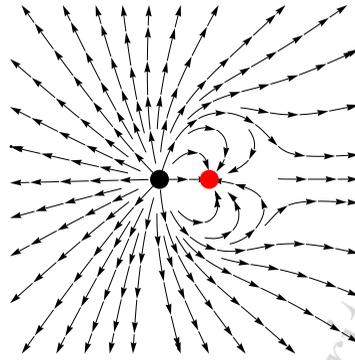


Figura 3.5: Linee di forza del campo elettrostatico generato dalle cariche $Q_1 = +3$ (nera) e $Q_2 = -1$ (rossa).

rigido che ruoti con velocità angolare ω , come mostrato schematicamente nella Fig. 3.6 e chiediamoci come dovrebbe essere rappresentato il *campo di velocità* dei singoli punti che costituiscono il corpo. Non è dif-

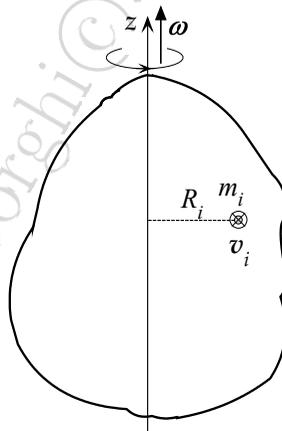


Figura 3.6: Corpo rigido in rotazione attorno a un asse fisso.

ficile rendersi conto che, poiché ciascun elemento del corpo compie un moto circolare sul piano ortogonale all'asse di rotazione e passante per

l'elemento stesso, le linee di forza saranno necessariamente delle circonferenze concentriche e con il centro in corrispondenza dell'asse z , come mostrato schematicamente nella Fig. 3.7.

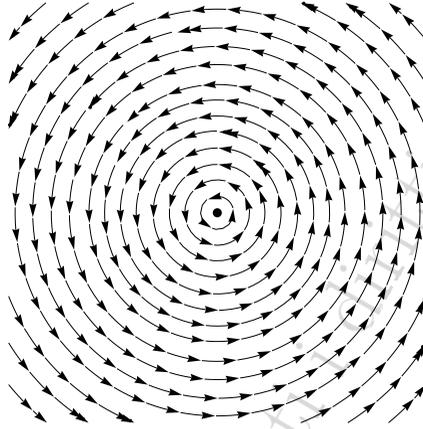


Figura 3.7: Le linee di forza del campo di velocità.

3.3 Proprietà di un campo vettoriale. Conservatività di \mathbf{E}

Per quanto abbiamo sinora visto dovrebbe apparire piuttosto chiaro come tutta l'elettrostatica sia contenuta nella legge di Coulomb e nel principio di sovrapposizione (3.4). In verità un simile approccio risulterebbe eccessivamente oneroso da un punto di vista computazionale e, francamente, piuttosto noioso da un punto di vista teorico. Al di là di questo vi è anche un'altra importante ragione per cercare strategie di studio alternative. Come vedremo in seguito, la forza che viene esercitata su una carica elettrica q puntiforme non dipende solamente dal campo elettrico generato da altre cariche. Succede che questa forza può dipendere anche dalla *velocità vettoriale* di q , secondo la formula

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (3.5)$$

dove \mathbf{B} indica il cosiddetto *campo magnetico*. Il problema è che tentare una caratterizzazione del campo magnetico utilizzando l'approccio se-

guito per il campo elettrostatico è considerevolmente più complesso. In altri termini, è difficile derivare una “formula di Coulomb” per il campo magnetico, sebbene in talune circostanze si possa scrivere qualcosa di simile, come avremo modo di vedere. In realtà la caratterizzazione di un campo vettoriale viene condotta utilizzando un approccio completamente diverso rispetto a quanto visto sinora per il campo elettrostatico. Un teorema fondamentale dell’analisi vettoriale, noto come teorema di Helmholtz, asserisce che per caratterizzare completamente un campo vettoriale occorre studiarne le proprietà di conservatività e di solenoidalità. Iniziamo dalla prima.

Il campo elettrostatico generato da un’arbitraria distribuzione di carica è conservativo. Per rendersene conto è sufficiente sfruttare l’analogia matematica con il campo di forze centrali visto a proposito della legge di gravitazione universale, che ci porta a concludere che il campo elettrostatico generato da una singola carica puntiforme deve essere conservativo. Il principio di sovrapposizione farà il resto. In particolare, tenendo conto che il campo non è altro che una forza per unità di carica, potremo scrivere

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = V(A) - V(B), \quad (3.6)$$

dove l’integrale di linea può essere calcolato lungo un qualsiasi percorso che colleghi i punti A e B , e la funzione scalare $V = V(P)$, che chiameremo *potenziale elettrostatico*, è, dimensionalmente parlando, un’energia per unità di carica. Nel S.I. il potenziale elettrostatico si misura in *volt*. In questo modo vediamo come un joule è il lavoro necessario perché una carica di un coulomb attraversi una differenza di potenziale di un volt.

Una formulazione alternativa, ma matematicamente equivalente, della (3.6), è stata già incontrata nella forma seguente:

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0, \quad (3.7)$$

dove il simbolo \mathcal{C} indica un’arbitraria curva *chiusa* nello spazio. È interessante analizzare quest’ultima formulazione della proprietà di conservatività del campo elettrostatico da un punto di vista grafico. In particolare, vogliamo dimostrare come dalla (3.7) discenda il fatto che linee di forza del campo (in particolare di qualsiasi campo conservativo) devono necessariamente essere *aperte*. A questo scopo utilizzeremo

ancora una volta la tecnica di dimostrazione per assurdo. Supponiamo che esista almeno una linea chiusa, diciamo \mathcal{C} , e calcoliamone la relativa circuitazione, come mostrato nella Fig. 3.8.

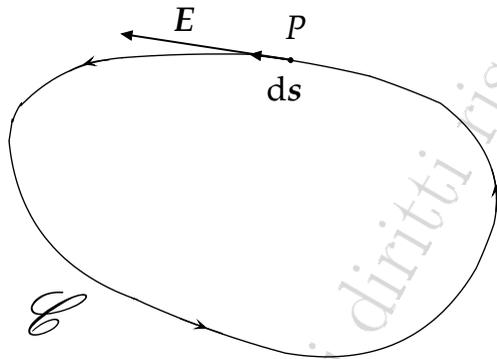


Figura 3.8: Dimostrazione che le linee di forza di un campo conservativo sono necessariamente aperte.

Orientando il circuito nel verso della linea di forza, in modo che in ogni punto di essa il campo elettrico \mathbf{E} e lo spostamento infinitesimo $d\mathbf{s}$ risultino paralleli, dalla definizione di prodotto scalare segue $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E ds$, quantità sempre *positiva*. Sostituendo nella (3.7) abbiamo allora

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\mathcal{C}} E ds > 0. \quad (3.8)$$

Siamo dunque giunti alla conclusione che esiste almeno un circuito nello spazio per il quale la circuitazione del campo conservativo è *non nulla*, il che contraddice l'ipotesi di partenza, ossia che la (3.7) deve valere per qualsiasi circuito. Le linee di forza di un campo conservativo devono essere necessariamente aperte, c.v.d.

Capitolo 4

Lezione 17 maggio 2017

4.1 Potenziale elettrostatico

Applichiamo adesso la (3.6) per calcolare il potenziale elettrostatico associato al campo generato da una singola carica puntiforme Q . Per quanto già visto nel caso della forza gravitazionale, scriveremo

$$V(P) = k_0 \frac{Q}{r} + \text{costante} . \quad (4.1)$$

La costante arbitraria si pone pari a zero, il che implica che il potenziale si annulla a distanza *infinita* dalla carica. Porre a zero la costante ha un chiaro significato fisico: il potenziale elettrostatico rappresenta il lavoro che occorre spendere per portare una carica positiva unitaria dall'infinito al punto P lungo un'arbitrario percorso.¹ Scriveremo dunque

$$\boxed{V(P) = k_0 \frac{Q}{r}} \quad (4.2)$$

Per un'arbitraria configurazione di cariche $\{Q_j\}_{j=1}^N$, rappresentata nella Fig. 4.1, il potenziale elettrostatico diventa, grazie al principio di

¹Il lettore lo dimostri.

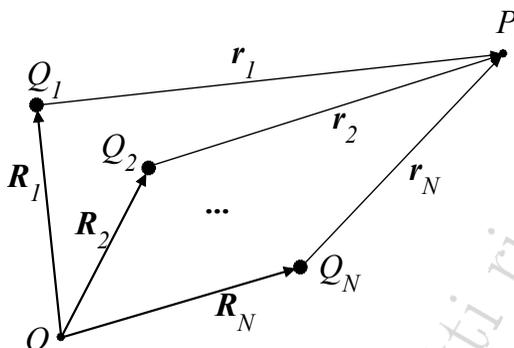


Figura 4.1: Il potenziale elettrostatico prodotto da N cariche sorgenti.

sovrapposizione,

$$V(P) = k_0 \sum_{j=1}^N \frac{Q_j}{r_j}, \quad (4.3)$$

È importante rendersi conto del fatto che un campo *vettoriale* conservativo deve essere in qualche modo riconducibile a un campo *scalare*, e che a partire da quest'ultimo sia possibile riottenere il primo. Cercheremo di spiegare questo fatto utilizzando semplici strumenti grafici. Abbiamo visto come un campo vettoriale si possa rappresentare tramite linee di forza. Esiste una rappresentazione grafica del potenziale? La risposta è affermativa e si chiama *superficie equipotenziale*, che rappresenta il luogo dei punti dello spazio in cui il potenziale elettrostatico assume un medesimo valore, diciamo V_0 ,

$$V(P) = V_0. \quad (4.4)$$

Per fare un esempio concreto, consideriamo le superfici equipotenziali del campo generato da una singola carica puntiforme. Dalla (4.2) è evidente che tali superfici hanno la forma di *sfere* centrate sulla carica stessa.² Nella Fig. 4.2 le superfici equipotenziali associate al campo generato da una singola carica sono rappresentate tramite le linee tratteggiate.³

²Il lettore lo dimostri.

³Ovviamente tali linee rappresentano le intersezioni delle superfici con il piano del foglio passante per la carica.

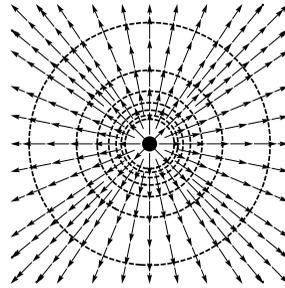


Figura 4.2: Linee di forza e superfici equipotenziali del campo generato da una carica puntiforme positiva.

Nella Fig. 4.3, invece, sono riportate alcune superfici equipotenziali del campo di cui alla Fig. 3.4b.

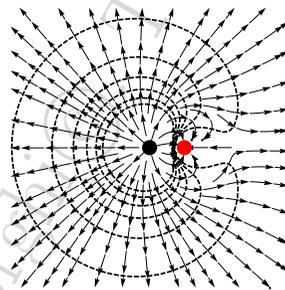


Figura 4.3: Linee di forza e superfici equipotenziali del campo generato dalle due cariche puntiformi della Fig. 3.4b.

Dalle figure si evince chiaramente come le linee di forza del campo elettrostatico e le superfici equipotenziali siano mutuamente ortogonali. Per dimostrare che questa proprietà vale in generale, consideriamo la Fig. 4.4, dove i punti P e Q , infinitamente vicini, appartengono alla medesima superficie equipotenziale (tratteggiata nella figura). Poiché per ipotesi il vettore $\overline{PQ} = d\mathbf{s}$ è infinitesimo, possiamo considerarlo come giacente sul piano tangente alla superficie equipotenziale e passante per

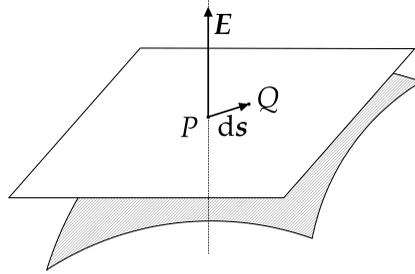


Figura 4.4: Superficie equipotenziale e linea di forza sono ortogonali.

P , anch'esso disegnato nella figura. Applicando la (3.6) ai punti P e Q , e tenendo conto che l'integrale di linea si riduce in questo caso al solo contributo infinitesimo $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$, abbiamo

$$V(P) - V(Q) = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0, \quad (4.5)$$

ossia \mathbf{E} e $d\mathbf{s}$ sono ortogonali, c.v.d. Rimane ancora da comprendere in che modo stabilire verso e modulo del campo vettoriale. Per quanto riguarda il primo, è sufficiente ricordare che un campo conservativo è diretto sempre verso punti il cui potenziale sia *minore* rispetto a quello del punto P , come schematizzato nella Fig. 4.5.

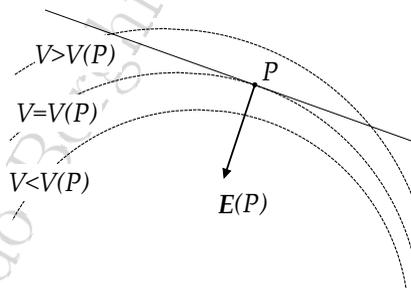


Figura 4.5: Il verso del campo elettrostatico.

Per stabilire il modulo applichiamo nuovamente la (3.6) a punti appartenenti a due superfici equipotenziali infinitamente vicine, come schematizzato nella Fig. 4.6. A partire dal punto P introduciamo un asse r orientato lungo la direzione del campo e applichiamo la (3.6). Tenendo

conto che $dV < 0$ si ottiene

$$-dV = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \implies \boxed{E = -\frac{dV}{dr}} \quad (4.6)$$

che coincide con la cosiddetta *derivata direzionale*.

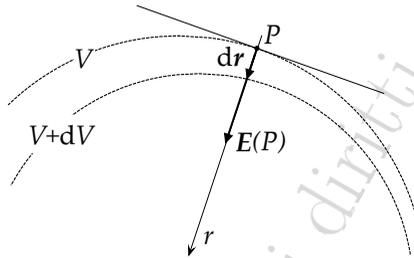


Figura 4.6: Il modulo del campo elettrostatico.

4.2 L'energia elettrostatica di una sfera carica

Vediamo adesso un'interessante applicazione di quanto appreso sinora. Immaginiamo di voler “assemblare” una sfera di raggio a nel cui volume sia distribuita uniformemente una quantità di carica elettrica Q . Sappiamo che per portare due cariche puntiformi dello stesso segno a una reciproca distanza finita occorre spendere un lavoro a causa della continua repulsione delle cariche. È dunque plausibile che mettere insieme una sfera richiederà un'energia. Dalla (2.2) appare altresì chiaro come quest'energia, diciamo \mathcal{E} , deve dipendere, per ragioni di carattere meramente dimensionali, quadraticamente dalla carica totale ed essere inversamente proporzionale al raggio. Scriveremo dunque

$$\mathcal{E} = \gamma k_0 \frac{Q^2}{a}, \quad (4.7)$$

dove, similmente a quanto visto a proposito dei momenti d'inerzia, γ rappresenta un numero positivo che dipenderà solamente dalla *forma* della distribuzione, il cui valore, come dimostreremo tra breve, è pari

a $3/5$. È molto importante che tale fattore sia proprio dell'ordine dell'unità. Per dimostrarlo, possiamo ragionare come segue. Supponiamo di aver già assemblato la sfera di raggio a con la carica Q . Il lavoro necessario per portare un'ulteriore carica infinitesima dQ dall'infinito sulla superficie della sfera, ossia a distanza a dal centro della sfera, sarà pari al prodotto della carica per il potenziale elettrostatico in corrispondenza dei punti della sua superficie. Questo lavoro deve corrispondere integralmente all'aumento dell'energia elettrostatica della sfera, cosicché scriveremo

$$k_0 \frac{Q}{a} dQ = d\mathcal{E}. \quad (4.8)$$

Per calcolare l'incremento energetico a secondo membro è necessario tener conto che, distribuendo dQ uniformemente sulla superficie della sfera, anche il raggio deve subire un incremento infinitesimo se vogliamo mantenere costante la densità volumetrica di carica. Differenziando ambo i membri della (4.7) si ottiene

$$k_0 \frac{Q}{a} dQ = 2\gamma k_0 \frac{Q}{a} dQ - \gamma k_0 \frac{Q^2}{a^2} da, \quad (4.9)$$

che, tenendo conto del fatto che $Q \propto a^3$, con semplici passaggi algebrici dà proprio $\gamma = 3/5$, c.v.d.⁴

Abbiamo dunque dimostrato che l'energia necessaria per assemblare la sfera è pari a

$$\mathcal{E} = \frac{3}{5} k_0 \frac{Q^2}{a} \quad (4.10)$$

Ci si potrebbe chiedere quale potrebbe essere l'utilità pratica di una tale espressione, vista l'estrema idealità del modello. Come al solito la Natura sa essere alquanto sorprendente. Un nucleo di uranio ${}_{92}^{238}\text{U}$ contiene $A = 238$ nucleoni dei quali $Z = 92$ sono protoni e i restanti $A - Z = 146$ sono neutroni. L'elevato numero di protoni rende il nucleo instabile e "pronto" per esplodere a causa dell'intensa repulsione elettrostatica esercitata tra i protoni ivi presenti. La situazione è per certi versi simile a una rigida molla che viene mantenuta compressa da una forza ed è pronta per rilasciare l'energia potenziale immagazzinata. Le

⁴Il lettore lo dimostri.

forze che mantengono “compresso” e unito il nucleo d’uranio sono forze a corto raggio note come *forze forti*, agenti solamente tra coppie di nucleoni prossimi vicini, al contrario della repulsione elettrostatica tra i protoni il cui raggio d’azione è virtualmente infinita. Ciò è sufficiente per giustificare, almeno qualitativamente, la presenza di così tanti neutroni nel nucleo. Possiamo stimare le dimensioni di un nucleo d’uranio ipotizzando che i vari nucleoni si dispongano in modo che sia la massa che la carica appaiano grossolanamente distribuite uniformemente nel volume. Supponiamo allora di disporre tante “sferette” rigide di raggio r_0 (ciascuna rappresentante un nucleone) in modo da “riempire uniformemente”, per quanto possibile, una sfera di raggio a , come mostrato nella Fig. 4.7.

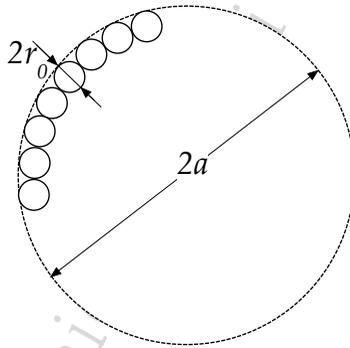


Figura 4.7: Riempimento del nucleo.

Poiché il numero di nucleoni è pari ad A , potremo scrivere approssimativamente

$$A \frac{4}{3} \pi r_0^3 \sim \frac{4}{3} \pi a^3 \implies a \sim \boxed{r_0 A^{1/3}} \quad (4.11)$$

Tenendo conto che $r_0 \simeq 1.2 \times 10^{-15}$ m, al (4.11) dà una stima del raggio del nucleo pari a circa 7.4×10^{-15} m. Calcoliamo l’energia elettrostatica immagazzinata nel nucleo di uranio considerandolo una sfera uniformemente carica con $Q = 92e$. Applicando la (4.10) abbiamo

$$\mathcal{E} \sim \frac{3}{5} \times 9 \times 10^9 \times 92^2 \times \frac{1.6 \times 10^{-19}}{7.4 \times 10^{-15}} \text{ eV} \sim 1 \text{ GeV}. \quad (4.12)$$

Supponiamo adesso che la sfera venga divisa in due sfere aventi identica massa, ciascuna con carica pari a $Q/2$. Ipotizzando che la somma delle masse delle due sfere sia identica alla massa iniziale, abbiamo per il loro raggio una stima di circa $a/\sqrt[3]{2}$,⁵ cosicché la variazione di energia elettrostatica dovuta al processo di fissione sarà pari a

$$\Delta\mathcal{E} = -(1 - 2^{-2/3})\mathcal{E} \simeq 0.4\mathcal{E} \simeq 0.4 \text{ GeV}. \quad (4.13)$$

È interessante notare come questo valore sia numericamente dello stesso ordine di grandezza di quello dell'energia liberata nel processo di fissione nucleare. Il fatto che la cosiddetta "energia nucleare" sia di fatto nient'altro che "energia elettrica" liberata quando le forze forti non sono più in grado di mantenere unito il nucleo è messo in evidenza nelle lezioni di Feynman, che dell'argomento era senza dubbio un esperto.

⁵Il lettore lo dimostri.

Capitolo 5

Lezione 18 maggio 2017

5.1 Il flusso di un campo vettoriale

Nella proprietà di conservatività del campo elettrostatico, espressa tramite le due formulazioni alternative (3.6) e (3.7), non vi è alcun esplicito riferimento alle sorgenti del campo elettrostatico, ossia alle cariche elettriche. Tuttavia, sappiamo dal teorema di Helmholtz che per caratterizzare completamente un campo vettoriale è necessario specificarne il comportamento rispetto a *due* proprietà. In altri termini, occorre scrivere un'altra equazione di campo. Nel caso del campo elettrostatico, la forma di tale equazione dipende esclusivamente dal fatto che la forza di Coulomb segue la “legge dell'inverso del quadrato”.

Esprimeremo matematicamente la relazione tra campo elettrostatico e le sue sorgenti attraverso una nuova grandezza fisica che prende il nome di *flusso*. Per arrivare alla sua definizione ricorreremo a una semplice analogia idrodinamica. Supponiamo di voler stimare la *portata* di un corso d'acqua, p.e. un ruscello o un fiume o una condotta forzata. A questo scopo immergiamo un'intelaiatura rigida, per esempio di forma rettangolare come quella mostrata nella Fig. 5.1, e misuriamo la quantità d'acqua che attraversa la sezione nell'unità di tempo.

Tale quantità, misurata in kg/s, rappresenta la portata. Per semplicità consideriamo un fluido avente densità costante e in cui tutte le

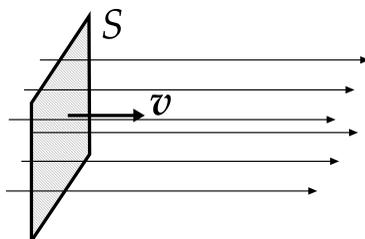


Figura 5.1: La portata di un fluido.

particelle si muovono con la medesima velocità vettoriale \mathbf{v} . Per calcolare quanta massa attraversa la sezione nell'unità di tempo, fissiamo un intervallo temporale Δt e consideriamo tutte le particelle che sono contenute all'interno di un cilindro retto avente area di base pari all'area dell'intelaiatura e altezza pari al prodotto $v\Delta t$. È evidente che queste particelle sono tutte e sole quelle che hanno attraversato la sezione durante il suddetto intervallo. Scriveremo dunque per la portata l'espressione seguente:

$$\frac{\rho S v \Delta t}{\Delta t} = \boxed{\rho v S} \quad (5.1)$$

Questo valore della portata chiaramente dipende dall'orientazione del telaio rispetto alla direzione della velocità.

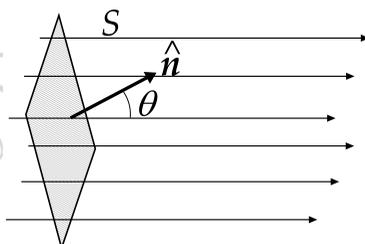


Figura 5.2: Dipendenza della portata dall'orientazione del flusso di particelle.

Se, per ipotesi, esso fosse disposto parallelamente a quest'ultima, nessuna particella attraverserebbe il telaio e la portata sarebbe nulla. In

altri termini, la portata dipende dall'angolo, diciamo θ , che la direzione di \mathbf{v} forma con il versore, diciamo $\hat{\mathbf{n}}$, normale alla superficie piana definita dal telaio, come mostrato in Fig. 5.2. Scriveremo dunque

$$\text{Portata} = \rho v S \cos \theta, \quad (5.2)$$

ovvero, interpretando la quantità $v \cos \theta$ come il prodotto scalare tra \mathbf{v} ed $\hat{\mathbf{n}}$,

$$\text{Portata} = \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} S. \quad (5.3)$$

Per generalizzare questo risultato consideriamo una superficie S , non necessariamente piana, immersa in un fluido in cui le particelle si muovono con velocità vettoriale diversa l'una dall'altra, come illustrato nella Fig. 5.3. Per calcolare la portata immaginiamo la superficie come l'unione di tanti elementi di superficie infinitesimi dS , a ciascuno dei quali assoceremo il versore normale $\hat{\mathbf{n}}$.

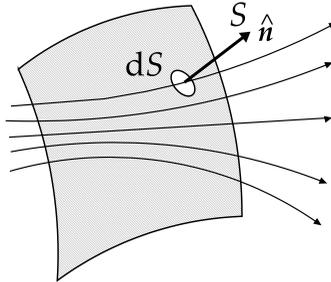


Figura 5.3: Il calcolo della portata per superficie e campo arbitrari.

La portata associata al generico elemento sarà $\rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$. Sommando su tutti gli elementi abbiamo infine

$$\text{Portata} = \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (5.4)$$

Da un punto di vista meramente matematico l'espressione (5.4) definisce la portata tramite un integrale di superficie, che prende il nome di *flusso* e che indicheremo nel seguito col simbolo $\Phi_S(\rho \mathbf{v})$.

5.2 Il teorema di Gauss

Il teorema di Gauss mette in relazione in flusso del del campo elettrostatico, *uscende* da una superficie *chiusa* S , con le sorgenti del campo stesso, ossia le cariche elettriche. La situazione più semplice che si possa immaginare è quella schematizzata nella Fig. 5.4, dove una singola carica puntiforme Q è posta all'interno di una superficie chiusa S di forma arbitraria.

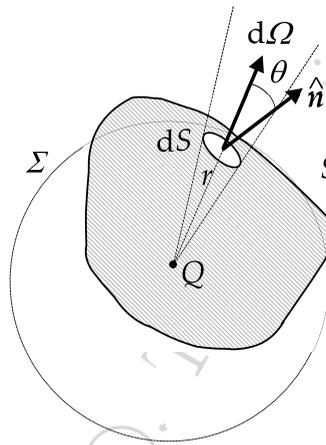


Figura 5.4: La geometria del teorema di Gauss.

Il flusso uscente $\Phi_S(\mathbf{E})$ è, per definizione

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS, \quad (5.5)$$

dove il circoletto sul simbolo d'integrale sta a ricordare che la superficie attraverso cui stiamo calcolando il flusso è chiusa. Sostituendo nella (5.5) la legge di Coulomb (3.4), otteniamo per il contributo relativo all'elemento infinitesimo dS la seguente espressione:

$$d\Phi = \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = k_0 \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = k_0 \frac{Q}{r^2} \boxed{\cos \theta dS} \quad (5.6)$$

Ora, il termine circolettato può essere interpretato come l'area dell'elemento di superficie ottenuto *proiettando* l'elemento di superficie dS sulla

sfera, indicata nella Fig. 5.4 col simbolo Σ , centrata in Q e avente raggio r . Indicando l'area della proiezione col simbolo dS' possiamo senz'altro identificare il rapporto dS'/r^2 con l'angolo solido $d\Omega$ sotto il quale l'elemento di superficie dS è visto dalla carica puntiforme Q . Questa è l'essenza del teorema di Gauss ed è conseguenza della dipendenza del campo elettrostatico $\mathbf{E} \propto r^{-2}$. Dalla (5.6) segue che per calcolare il flusso totale di \mathbf{E} attraverso la superficie chiusa S è sufficiente sommare angoli solidi, cosicché la (5.5) diventa

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = k_0 Q \oint_S d\Omega = k_0 Q \Omega_{\text{tot}}, \quad (5.7)$$

dove Ω_{tot} indica l'angolo solido sotto il quale l'intera superficie è vista dalla carica. Se questa è all'interno della superficie, quest'ultima sarà vista sotto un angolo solido "giro", ossia $\Omega_{\text{tot}} = 4\pi$. Se, viceversa, la carica è posta esternamente alla superficie, complessivamente l'angolo solido sarà *nulla*, poiché la superficie è chiusa. Ci si può convincere di questo affrontando il problema da un diverso punto di vista, schematizzato nella Fig. 5.5.

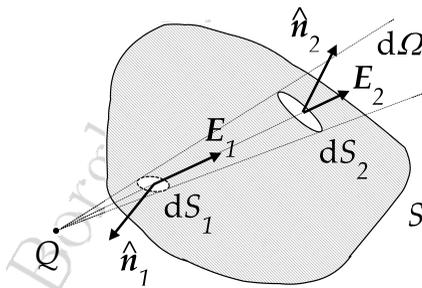


Figura 5.5: Il teorema di Gauss con la carica esterna alla superficie.

Poiché Q è esterna alla superficie, un dato angolo solido infinitesimo $d\Omega$ intercederà due diversi elementi su S , diciamo dS_1 e dS_2 , i cui versori normali, rispettivamente \hat{n}_1 e \hat{n}_2 , formeranno con la direzione del campo elettrostatico rispettivamente un angolo maggiore e un angolo minore di $\pi/2$. In altri termini, i contributi al flusso saranno di segno opposto ma uguali in modulo, essendo identico l'angolo solido sotteso. Conseguentemente essi si elideranno dando un contributo com-

nessuno. Ripetendo il ragionamento per tutte le coppie di elementi si otterrà infine $\Phi_S = 0$, c.v.d.

Scriveremo dunque il teorema di Gauss come segue:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \begin{cases} 4\pi k_0 Q, & Q \in V, \\ 0, & Q \notin V; \end{cases} \quad (5.8)$$

dove V indica il volume racchiuso dalla superficie chiusa $S = \partial V$. Bisogna prestare attenzione all'applicazione della (5.8) qualora la carica fosse posizionata *sulla* superficie. Se il comportamento della superficie è regolare, ossia se è possibile definire il piano tangente, allora è chiaro che Ω_{tot} sarà pari a 2π (angolo piatto solido). Ma si possono trovare facilmente delle eccezioni, come vedremo in seguito.

La (5.8) si può facilmente generalizzare al caso di un'arbitraria distribuzione di cariche. Consideriamo la situazione schematizzata nella Fig. 5.6, dove due delle quattro cariche (Q_1 e Q_4) sono esterne alla superficie e le altre due (Q_2 e Q_3) sono interne.

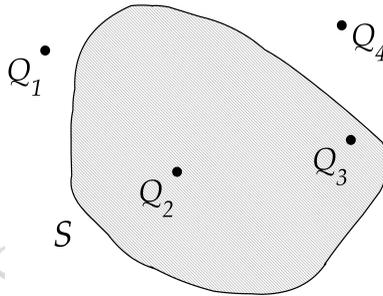


Figura 5.6: Il teorema di Gauss in presenza di più cariche.

Per calcolare il flusso del campo elettrico generato dalle quattro cariche è sufficiente applicare il principio di sovrapposizione degli effetti. Il campo totale \mathbf{E} è la somma vettoriale dei campi generati da ciascuna delle quattro cariche,

$$\mathbf{E} = \sum_{k=1}^4 \mathbf{E}_k, \quad (5.9)$$

cosicché il flusso $\Phi_S(\mathbf{E})$ diventa

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \sum_{k=1}^4 \Phi_S(\mathbf{E}_k) = 4\pi k_0 (Q_2 + Q_3), \quad (5.10)$$

dove nell'ultimo passaggio è stata utilizzata la (5.8). Scriveremo dunque il teorema di Gauss nella sua forma più generale come segue:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = 4\pi k_0 Q_{\text{int}}, \quad (5.11)$$

ovvero, esprimendo la quantità di carica interna a S tramite la densità di carica ρ ,

$$\boxed{\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = 4\pi k_0 \int_V \rho \, dV} \quad (5.12)$$

essendo V il volume contenuto all'interno di $S = \partial V$.

Capitolo 6

Lezione 22 maggio 2017

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \equiv 0$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 4\pi k_0 \int_V \rho dV$$

6.1 Equilibrio in un campo elettrostatico

Vogliamo adesso applicare il teorema di Gauss per dimostrare che all'interno di un campo elettrostatico generato da un'arbitraria distribuzione di cariche elettriche *puntiformi non* esistono punti di equilibrio *stabile*. Per introdurre il problema consideriamo due cariche puntiformi identiche positive, diciamo Q_1 and Q_2 , e cerchiamo le posizioni di equilibrio per il campo da esse generato, ossia i punti dello spazio dove la forza che subirebbe una carica di prova q è nulla. In altri termini, cerchiamo gli "zeri" del campo elettrostatico, $\mathbf{E} = 0$. È facile dimostrare che l'unico punto di equilibrio per le due cariche coincide col punto medio del segmento $\overline{Q_1Q_2}$, come mostrato nella Fig. 6.1a.

Dobbiamo studiare la *stabilità* dell'equilibrio. A questo scopo immaginiamo di spostare una carica di prova *positiva* dal punto di equilibrio verso un punto ad esso sufficientemente vicino. La stabilità dell'equilibrio implica che la forza esercitata sulla carica tenderà riportarla verso il punto iniziale. In altri termini, quale che sia lo spostamento il campo

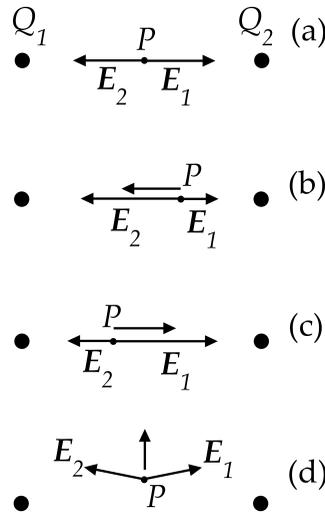


Figura 6.1: Stabilità in un sistema di due cariche.

elettrostatico nella nuova posizione dovrà puntare verso il punto di equilibrio. Vediamo cosa succede nel caso delle due cariche. Supponiamo, come mostrato nelle Fig. 6.1b e 6.1c, che la carica venga spostata dal punto di equilibrio in un punto P posto sul segmento $\overline{Q_1Q_2}$. È facile vedere che il campo punterebbe in ogni caso verso il punto di equilibrio. Tuttavia, spostando la carica di prova nel punto P mostrato nella Fig. 6.1d, si vede che questa volta la forza elettrostatica agirebbe in modo da *allontanare* la carica positiva. L'equilibrio è dunque instabile.¹

Dimostreremo adesso l'instabilità di un *qualsiasi* punto di equilibrio di un generico campo elettrostatico, purché generato da sole cariche puntiformi, utilizzando il teorema di Gauss. A questo scopo utilizzeremo ancora una volta la tecnica di dimostrazione per assurdo. Supponiamo dunque che una carica di prova *positiva* sia posizionata nel punto P di equilibrio di un campo elettrostatico e facciamo l'ipotesi che l'equilibrio sia *stabile*. Ciò significa che, muovendo la carica di prova in una *qualsiasi* posizione in un intorno di P , la forza elettrostatica $q\mathbf{E}$ dovrà riportarla

¹Il lettore dimostri l'instabilità dell'equilibrio utilizzando una carica di prova *negativa*.

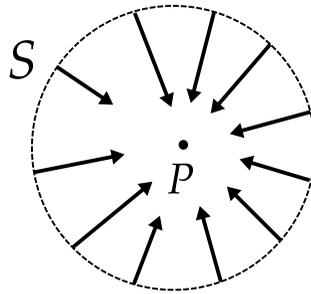


Figura 6.2: Stabilità in un sistema di carica statiche.

verso P . Essendo la carica di prova positiva abbiamo che, scegliendo una superficie chiusa S che circonda il punto di equilibrio P , il campo elettrico in ogni punto della superficie dovrà necessariamente puntare sempre verso P e, dunque, verso l'interno della superficie, cosicché $\Phi_S(\mathbf{E}) < 0$. Tuttavia, questa conclusione è in contraddizione con l'ipotesi fatta, ossia che le cariche generatrici del campo sono puntiformi. In altri termini, si potrà sempre scegliere S in modo che al suo interno non vi siano cariche generatrici. Il teorema di Gauss garantisce che il flusso uscente da S deve essere nullo, in contraddizione con quanto appena trovato. L'ipotesi di partenza è dunque falsa. Non possono esistere punti di equilibrio stabile.²

6.2 Un'applicazione non convenzionale del teorema di Gauss

Consideriamo la situazione descritta nella Fig. 6.3. La carica puntiforme Q è posta in corrispondenza di uno dei vertici di un cubo di lato a , e vogliamo calcolare il flusso del campo elettrostatico attraverso ciascuna faccia del cubo.

Per risolvere il problema possiamo utilizzare due diverse strategie. La prima consiste nel valutare direttamente il flusso utilizzando la definizione; ossia

$$\Phi_i = \int_{S_i} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS, \quad (6.1)$$

²Il lettore dimostri l'instabilità nel caso di una carica di prova negativa.

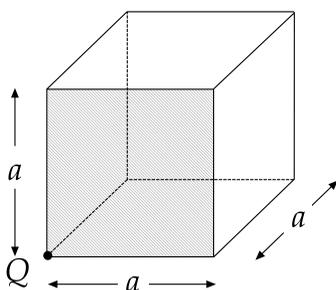


Figura 6.3: Il teorema di Gauss con la carica in un punto non regolare.

dove Φ_i rappresenta il flusso del campo elettrico attraverso la i -esima faccia del cubo \mathcal{S}_i , dove $i = 1, 2, \dots, 6$. Potremmo introdurre un sistema di riferimento cartesiano $Oxyz$, p.e. con l'origine O coincidente con la carica e con gli assi coordinati paralleli agli spigoli del cubo. Esprimendo il campo elettrico della carica in termini delle coordinate Cartesiane, il tutto si riduce al calcolo di sei integrali di superficie, un esercizio tutt'altro che banale di analisi matematica.³ In particolare, di questi sei integrali, tre saranno nulli (corrispondenti alle facce che “toccano” Q , come quella tratteggiata mostrata nella figura), in quanto il campo elettrico è costantemente ortogonale al vettore normale. Dunque il calcolo si è ridotto della metà.

Per calcolare i restanti tre integrali, possiamo ricorrere a una strategia alternativa, che fa uso del teorema di Gauss. Per prima cosa notiamo che il flusso di \mathbf{E} attraverso le tre facce è *identico* per ciascuna faccia, a causa dell'evidente simmetria. Indichiamo con Φ_0 questo valore comune del flusso. Consideriamo adesso l'intera superficie cubica. Ricordando la (5.7), dobbiamo valutare l'angolo solido sotto il quale il cubo è visto da uno dei suoi vertici. Non è difficile convincersi del fatto che questo angolo solido coincide con quello corrispondente a un “ottante”, ossia un ottavo dell'angolo solido giro, $\Omega_{\text{totale}} = 4\pi/8 = \pi/2$. Sostituendo questo

³Provate a calcolare l'integrale doppio. Come aiuto, tenete presente che:

$$\int_0^1 \frac{1}{(x^2 + b^2 + 1)^{3/2}} dx = \frac{1}{(b^2 + 1)\sqrt{b^2 + 2}}.$$

valore nella (5.7), otteniamo immediatamente

$$\Phi_0 = \frac{k_0 Q \pi}{6}, \quad (6.2)$$

che rappresenta dunque il risultato cercato.

6.3 Conduttori in elettrostatica

Col termine *conduttore* siamo soliti indicare un solido che contiene molti elettroni “liberi” di muoversi al suo interno ma che non possono lasciarne il volume. In un metallo sono presenti così tanti elettroni che un generico campo elettrostatico ad esso applicato li metterà in movimento. A meno che non sia presente qualche sorgente esterna di energia in grado di mantenerli costantemente in moto, dopo l'applicazione del campo la corrente di elettroni andrà diminuendo in seguito alla redistribuzione delle cariche libere nel volume del conduttore sino al raggiungimento di una nuova situazione di equilibrio statico (ciò che generalmente avviene in una piccola frazione di secondo). È proprio questa situazione che vogliamo studiare. Poiché una volta raggiunto l'equilibrio statico le cariche libere non potranno più muoversi, deduciamo che

il campo elettrostatico all'interno del volume di un conduttore deve essere necessariamente nullo.

Vedremo adesso come questa semplice legge, utilizzata insieme alle due proprietà fondamentali del campo elettrostatico, permetta di derivare le principali proprietà dei conduttori seguendo una via puramente deduttiva.

Inizieremo dimostrando che non può essere presente carica libera all'interno del volume del conduttore. A questo scopo consideriamo lo schema della Fig. 6.4, dove la superficie chiusa Σ è scelta all'interno del volume del conduttore, dove sappiamo il campo elettrico essere nullo. Dunque anche il flusso $\Phi_\Sigma(\mathbf{E})$ sarà nullo a patto che, come già detto, Σ sia interamente contenuta nel volume del conduttore. Per il teorema di Gauss ciò implica che la quantità di carica contenuta in Σ deve essere nulla. Stante l'arbitrarietà della scelta di Σ segue che all'interno del volume del conduttore non è presente alcuna carica libera. Dunque le cariche libere devono necessariamente “risiedere” sulla superficie del

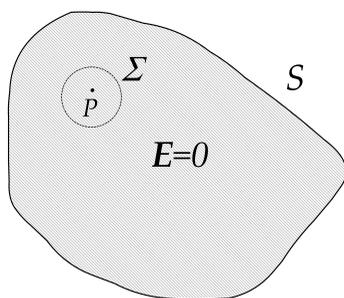


Figura 6.4: La carica all'interno della superficie del conduttore deve essere nulla.

conduttore, come schematizzato nella Fig. 6.5, dove sono presenti forze sufficientemente intense perché le cariche non lo abbandonino.⁴

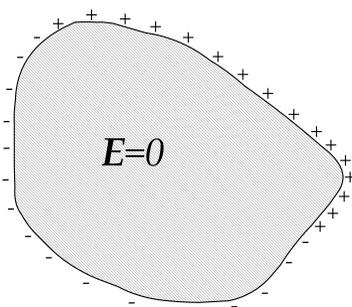


Figura 6.5: La carica si distribuisce sulla superficie del conduttore.

6.4 Il teorema di Coulomb

Una volta stabilito che il campo elettrico interno al conduttore è identicamente nullo, passiamo all'analisi del campo all'esterno. Per prima cosa dimostreremo che il campo in prossimità della superficie del conduttore deve necessariamente essere ortogonale ad essa. Possiamo facil-

⁴In realtà l'eccesso di carica presente in un conduttore è distribuito all'interno di uno o due tra gli strati atomici più esterni. Tuttavia, potremo ragionevolmente assumere che la carica libera sia tutta accumulata sulla superficie.

mente dimostrarlo sfruttando la proprietà di conservatività del campo elettrostatico.

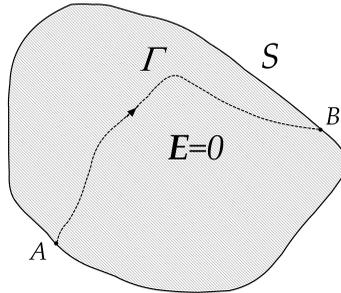


Figura 6.6: La superficie e il volume del conduttore sono equipotenziali.

A questo scopo scegliamo due punti, diciamo A e B , arbitrariamente scelti sulla superficie del conduttore e calcoliamo la circuitazione $\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ utilizzando un percorso Γ interamente contenuto all'interno del volume del conduttore, come schematizzato nella Fig. 6.6, cosicchè

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 \implies \boxed{V(A) = V(B)} \quad (6.3)$$

Stante l'arbitrarietà della scelta di A e B , dalla (6.3) segue che la superficie (e quindi il volume) di un qualsiasi conduttore in equilibrio elettrostatico è necessariamente *equipotenziale*.

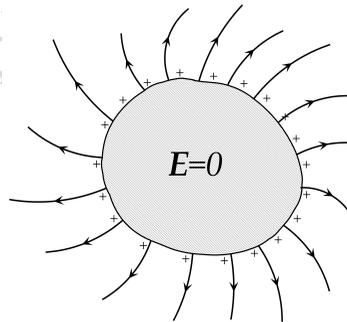


Figura 6.7: Linee di forza del campo elettrostatico prodotto in prossimità di un conduttore.

Per quanto visto, si deduce che le linee di forza del campo elettrostatico sono ortogonali alla superficie del conduttore, come schematizzato in Fig. 6.7. Si può anche ragionare in modo alternativo, notando che il campo elettrico superficie non può avere una componente tangenziale non nulla. Diversamente gli elettroni si muoverebbero lungo la superficie, contraddicendo l'ipotesi di staticità. Utilizzando ancora una volta la legge di Gauss possiamo stimare il modulo del campo elettrostatico alla superficie del conduttore, che risulta essere direttamente proporzionale alla densità superficiale della carica libera, diciamo σ . Con riferimento alla Fig. 6.8 consideriamo un cilindro avente superficie di base dS e altezza h "immerso" per metà nel conduttore e calcoliamo il flusso del campo elettrostatico uscente da Σ . È immediato dimostrare che esiste un solo contributo al flusso, precisamente quello dovuto alla base del cilindro che si trova all'esterno del conduttore.

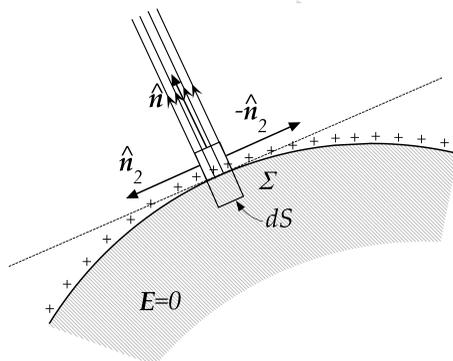


Figura 6.8: Il teorema di Coulomb.

Applicando il teorema di Gauss abbiamo

$$\Phi_{\Sigma} = 4\pi k_0 dQ_{\text{int}} = 4\pi k_0 \sigma dS = E dS \implies E = 4\pi k_0 \sigma, \quad (6.4)$$

da cui, tenendo conto della direzione di \mathbf{E} precedentemente trovata, si ottiene

$$\boxed{\mathbf{E} = 4\pi k_0 \sigma \hat{\mathbf{n}}} \quad (6.5)$$

che prende il nome di *Teorema di Coulomb*.

6.5 La gabbia di Faraday

Consideriamo ora un conduttore al cui interno sia ricavata una cavità. Sappiamo già che il campo elettrico all'interno del conduttore è nullo, ma cosa possiamo dire circa il campo in cavità? Dimostreremo che se la cavità è priva di carica non vi è alcun campo elettrico, indipendentemente da ciò che accade, elettricamente, all'esterno del conduttore, e indipendentemente dalla forma del conduttore o della cavità. A questo scopo utilizzeremo, ancora una volta, solamente le proprietà fondamentali del campo elettrostatico (conservatività e legge di Gauss) unitamente alla nullità del campo all'interno del volume del conduttore. Attraverso la legge di Gauss abbiamo già visto come dimostrare l'assenza di carica libera nel volume del conduttore. Ma in questo caso il conduttore contiene una cavità. Consideriamo allora una superficie chiusa Σ che circondi la cavità pur rimanendo interamente all'interno del materiale conduttore. Abbiamo allora $\Phi_{\Sigma} = 0$, da cui segue che la carica totale distribuita sulla superficie interna del conduttore deve essere nulla. Questo, ovviamente, non implica certo che la carica libera sia assente dalla superficie, ma solamente che, in generale, potrebbe essere presente un'identica quantità di carica positiva e negativa sulla superficie del conduttore, come schematizzato nella Fig. 6.9. Una simile eventualità non può essere esclusa sulla base della sola legge di Gauss.

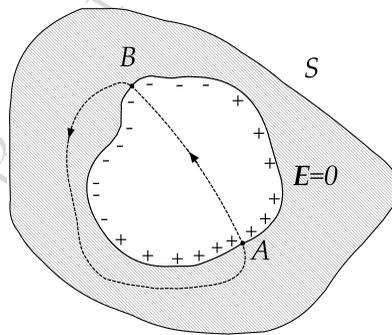


Figura 6.9: La gabbia di Faraday.

È tuttavia facile dimostrare che la configurazione di carica illustrata nella Fig. 6.9 è in palese contraddizione con la proprietà di conservatività del campo elettrostatico. Se infatti vi fossero cariche libere di segno

opposto sulla superficie interna si stabilirebbe all'interno della cavità un campo elettrostatico con le linee di forza orientate dalle cariche positive verso le cariche negative (poiché per ipotesi la cavità è vuota, ossia non vi sono cariche libere). Potremmo allora costruire un circuito \mathcal{C} seguendo una linea di forza, per esempio quella che collega i punti A e B , e tornando in A attraverso un percorso interamente contenuto all'interno del conduttore, come mostrato nella Fig. 6.9. È facile verificare che la circuitazione lungo \mathcal{C} non è essere nulla, contraddicendo in tal modo la proprietà di conservatività.⁵

Dunque non possono esistere campi elettrostatici all'interno di cavità conduttrici vuote. Ciò spiega il principio secondo cui per schermare un apparato elettrico è sufficiente porlo all'interno di una scatola metallica.⁶ In elettrostatica i campi elettrici all'interno e all'esterno di un guscio conduttore sono completamente indipendenti. Lo stesso non si vale per campi variabili nel tempo.

⁵Il lettore lo dimostri.

⁶Il lettore dimostri che lo schermo funziona anche dall'interno verso l'interno.

Capitolo 7

Lezione 24 maggio 2017

7.1 Condensatori

L'effetto schermante di un guscio conduttore visto nella lezione precedente trova un'applicazione di fondamentale importanza nello studio dei *condensatori*, che sono oggetti in grado di accumulare e rilasciare quantità considerevoli di carica applicando differenze di potenziale non troppo elevate.¹ La struttura di un condensatore ideale è schematizzata nella Fig. 7.1: all'interno di una cavità praticata nel volume di un conduttore viene inserito un altro conduttore che viene così ad essere completamente "circondato" dal primo. Supponiamo adesso che al conduttore interno venga conferito un eccesso di carica Q , per esempio positivo. All'interno della cavità si genera un campo elettrostatico le cui linee di forza nascono dal conduttore interno e terminano sulla superficie interna del conduttore esterno dove, come è immediato dimostrare utilizzando il teorema di Gauss, è distribuita una carica pari a $-Q$.²

Il funzionamento di un condensatore ideale prevede che il conduttore interno sia completamente racchiuso in quello esterno. In questo modo le linee di forza del campo elettrostatico saranno confinate all'interno della cavità e, a causa dell'effetto "gabbia di Faraday", non potranno

¹Si pensi al *flash* di una macchina fotografica.

²Il lettore lo dimostri.

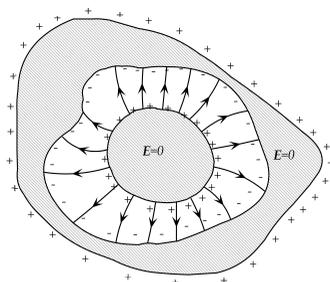


Figura 7.1: La struttura di un condensatore.

penetrare all'esterno del condensatore. Eventuali campi esterni, dovuti alla carica in eccesso presente sulla superficie esterna del conduttore esterno, possono essere rimossi collegando il condensatore "a terra", come mostrato nella Fig. 7.2.

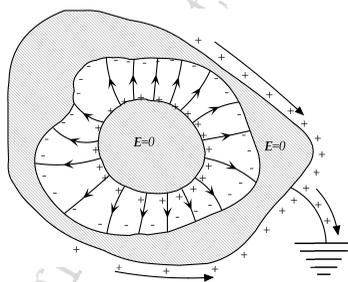


Figura 7.2: Condensatore collegato "a terra".

Una volta stabilita la configurazione di campo elettrostatico in cavità è possibile in linea di principio calcolare la differenza di potenziale tra il conduttore caricato positivamente e quello caricato negativamente. Tale differenza di potenziale, diciamo ΔV , risulta essere proporzionale a Q , ossia

$$\Delta V = \frac{Q}{C}, \quad (7.1)$$

dove il parametro C , che prende il nome di *capacità* del condensatore, dipende esclusivamente dalla geometria del sistema. Questa proporzionalità tra carica e potenziale riflette la linearità delle equazioni dell'elettrostatica, ovvero il principio di sovrapposizione.

A titolo di esempio calcoliamo la capacità del cosiddetto condensatore sferico, la cui geometria è mostrata nella Fig. 7.3. In virtù della

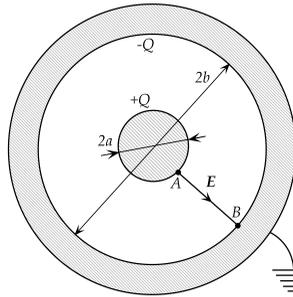


Figura 7.3: Geometria per il calcolo della capacità di un condensatore sferico.

simmetria sferica del problema, il campo elettrostatico in cavità si determina facilmente applicando il teorema superbo interno, ossia considerando la carica nel conduttore interno concentrata nel centro di simmetria e applicando la legge di Coulomb. La differenza di potenziale è

$$\Delta V = k_0 Q \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right), \quad (7.2)$$

dove a e b indicano rispettivamente il raggio del conduttore interno e il raggio del conduttore esterno. Sostituendo la (7.2) nella (7.1), con semplici passaggi otteniamo per la capacità l'espressione seguente:

$$C = \frac{1}{k_0} \frac{ab}{b - a}. \quad (7.3)$$

Nel S.I. l'unità di misura della capacità è il farad, che corrisponde alla capacità di un condensatore in grado di accumulare una carica di 1 coulomb con una tensione applicata pari a 1 volt. Un condensatore di un farad sarebbe gigantesco: volendolo realizzare con lastre distanti 1 mm, ognuna dovrebbe avere un'area pari a circa 100 km². In pratica si utilizzano sottomultipli del farad, come il μF , il $n\text{F}$ e il $p\text{F}$.

La capacità di accumulare carica non è prerogativa dei soli condensatori. Qualsiasi insieme di uno o più conduttori è in grado di accumulare carica sulle proprie superfici. Così, per esempio, ha senso parlare della

capacità di una singola sfera di raggio a . Questa si può pensare come un condensatore sferico la cui superficie esterna è portata all'infinito. In altri termini, ponendo $b \gg a$ nella (7.3) otteniamo facilmente

$$C_{\text{sfera}} = \frac{a}{k_0}. \quad (7.4)$$

A titolo di esempio numerico, diamo una stima della capacità della Terra, pensata come se fosse una sfera perfettamente conduttrice. Applicando la (7.6) e stimando la circonferenza terrestre in circa 4×10^7 m, abbiamo

$$C_{\text{Terra}} \simeq \frac{2\pi \times 10^7}{9 \cdot 10^9} \simeq 3 \mu\text{F}. \quad (7.5)$$

La geometria del condensatore sferico permette facilmente di ottenere la capacità del cosiddetto condensatore *piano*, costituito da due identiche lastre metalliche parallele e separate da una distanza piccola rispetto alle proprie dimensioni. Non è difficile convincersi che la geometria del condensatore piano corrisponde a quella del condensatore sferico nel limite in cui $a \rightarrow b$, come mostrato nella Fig. 7.4. In particolare, in-

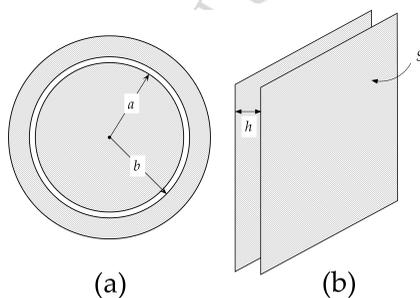


Figura 7.4: Dal condensatore sferico al condensatore piano.

dicando con $h = b - a$ la separazione tra le armature e stimando l'area della loro superficie come $S \simeq 4\pi a^2$, dalla (7.3) abbiamo

$$C_{\text{piano}} \simeq \frac{1}{k_0} \frac{a^2}{h} = \frac{1}{4\pi k_0} \frac{S}{h}. \quad (7.6)$$

I condensatori trovano importanti applicazioni nel campo dell'elettronica e dell'informatica, laddove specifiche variazioni di tensione elettrica sono richieste in seguito a particolari spostamenti di cariche elettriche. Valori tipici delle capacità di questi condensatori vanno dai pF

(tipicamente in circuiti oscillanti ad alta frequenza) sino alla centinaia o addirittura migliaia di μF nei filtri raddrizzatori per alimentatori ad alta potenza. Per fare un esempio concreto consideriamo un condensatore piano di 1 cm^2 d'area con una separazione di 1 mm . Dalla (7.6) si ottiene una stima della capacità di circa $10\ \mu\text{F}$.

7.2 L'energia elettrostatica di un condensatore

Abbiamo visto come il processo di “assemblaggio” di una distribuzione di cariche elettriche non sia energeticamente gratuito. Ci aspettiamo dunque che accumulare cariche dello stesso segno separatamente sulle armature di un condensatore richieda una ben precisa energia. Per calcolarla, seguiremo un ragionamento piuttosto astratto e generale che, ancora una volta, sfrutterà le sole proprietà generali dell'elettrostatica. Supponiamo di voler depositare le cariche $+Q$ e $-Q$ sulle armature di un condensatore di capacità C . Supponiamo altresì che il processo di carica sia già iniziato e abbia portato sulle armature le cariche $+q$ e $-q$, con $q < Q$, in modo che la ddp tra le armature sia $V = q/C$. Calcoliamo adesso il lavoro necessario per incrementare la carica di una quantità infinitesima dq . Questo lavoro coincide con quello necessario per trasportare la carica dq dall'armatura negativa a quella positiva, come mostrato nella Fig. 7.5.

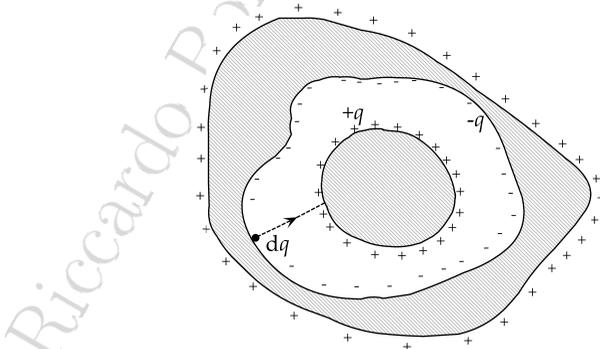


Figura 7.5: Carica del condensatore.

In virtù della conservatività del campo elettrostatico possiamo calcolare il suddetto lavoro scegliendo un percorso arbitrario all'interno della cavità. Per definizione abbiamo

$$d\mathcal{L} = V dq = \frac{q}{C} dq. \quad (7.7)$$

Imponendo che $d\mathcal{L}$ eguagli l'incremento di energia del condensatore e integrando rispetto a q sull'intervallo $[0, Q]$, otteniamo infine per l'energia totale la seguente espressione:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}. \quad (7.8)$$

È interessante notare come la struttura matematica della (7.8) sia identica all'espressione dell'energia potenziale elastica di una molla, non appena si Q venga identificata con la deformazione della molla e $1/C$ con la costante elastica. Vedremo in seguito l'utilità di questa interessante analogia.

7.3 Potere delle punte

Vogliamo adesso discutere, seppur qualitativamente, un effetto comunemente noto come “potere delle punte”, che consiste nel caricare elettricamente un conduttore dotato di una punta, come schematizzato nella Fig. 7.6a.

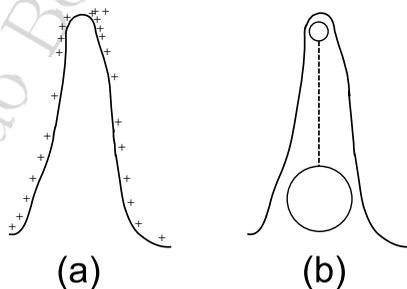


Figura 7.6: Un conduttore puntiforme carico (a) e un possibile modello (b).

In particolare si osserva che il campo elettrico generato in prossimità della punta è molto più intenso di quello in prossimità delle altre regioni del conduttore. Questo fenomeno può essere spiegato qualitativamente tenendo conto che le cariche dello stesso segno si disporranno sulla superficie del conduttore in modo da allontanarsi reciprocamente il più possibile. Ciò significa che alcune cariche saranno necessariamente “spinte” verso la punta. A causa dell’elevata curvatura della superficie, anche un numero relativamente piccolo di cariche darà luogo a un’elevata densità superficiale. Per il teorema di Coulomb un’elevata densità superficiale di carica implica un elevato campo elettrico in prossimità della superficie del conduttore. A causa dell’elevata curvatura della superficie, anche un numero relativamente piccolo di cariche darà luogo a un’elevata densità superficiale. Possiamo dare a queste considerazioni qualitative una veste quantitativa considerando un modello elementare del conduttore, schematizzato in Fig. 7.6b: due sfere conduttrici, rispettivamente di raggio a e $b < a$, collegate da un filo conduttore di lunghezza $D \gg a, b$.

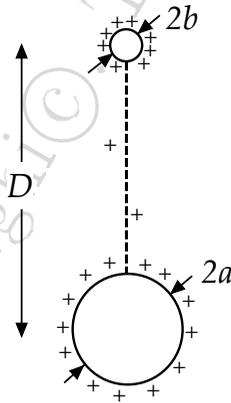


Figura 7.7: Il calcolo dei campi elettrici.

Immaginiamo di fornire nel sistema una certa quantità di carica che si andrà a depositare sulle sfere e, in minima parte, sul filo, come mostrato nella Fig. 7.7. Denotiamo Q_a e Q_b le cariche totali sulle sfere. Ipotizzando che ciascuna sfera non influenzi l’altra, scriveremo i potenziali V_a

e V_b come

$$V_a = k_0 \frac{Q_a}{a}, \quad (7.9)$$

$$V_b = k_0 \frac{Q_b}{b}. \quad (7.10)$$

Inoltre, poiché le sfere sono collegate elettricamente tramite il filo, dovranno trovarsi al medesimo potenziale, ossia

$$\frac{Q_a}{a} = \frac{Q_b}{b}. \quad (7.11)$$

D'altro canto sappiamo che, per il teorema di Coulomb, il campo elettrostatico in prossimità di ciascuna sfera è proporzionale alla densità superficiale di carica. Scriveremo dunque

$$\frac{E_a}{E_b} = \frac{Q_a/a^2}{Q_b/b^2} = \frac{b}{a}, \quad (7.12)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato la (7.11).

Capitolo 8

Lezione 25 maggio 2017

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \equiv 0$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 4\pi k_0 \int_V \rho dV$$

8.1 Correnti elettriche

Le correnti elettriche sono prodotte dal movimento di portatori di cariche. La grandezza fisica che descrive adeguatamente il trasporto di un sistema di cariche che si muovono in uno spazio tridimensionale è la densità di corrente, già incontrata a proposito del flusso di un campo vettoriale e definita come

$$\mathbf{J} = \rho \langle \mathbf{v} \rangle \quad (8.1)$$

Il simbolo $\langle \mathbf{v} \rangle$ denota il valore medio della velocità vettoriale dei portatori di carica calcolato su un volume sufficientemente piccolo per poterlo considerare come infinitesimo ma sufficientemente grande perché contenga al suo interno un numero di portatori di carica sufficientemente elevato per poter dare un senso alla suddetta operazione di media. Nel seguito utilizzeremo semplicemente il simbolo \mathbf{v} per denotare tale valor medio. La quantità totale di carica che attraversa nell'unità di tempo una qualsiasi superficie S definisce la cosiddetta *intensità di corrente*,

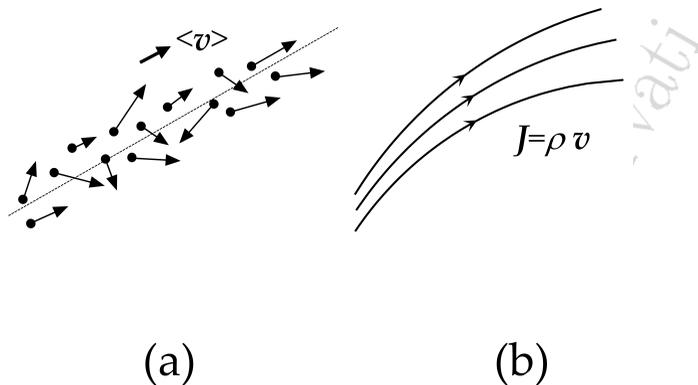


Figura 8.1: Un flusso di cariche cariche elettriche.

nel seguito indicata col simbolo i . Essa corrisponde alla portata ed è definita tramite il flusso della densità di corrente,

$$i = \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS, \quad (8.2)$$

dove S rappresenta un'arbitraria superficie (aperta o chiusa) attraversata dalle linee di forza del campo vettoriale \mathbf{J} , come mostrato nella Fig. 8.2.

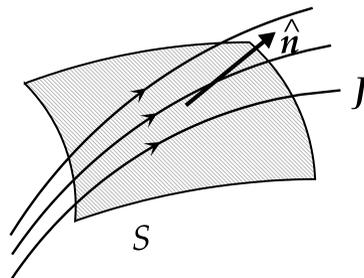


Figura 8.2: L'intensità di corrente.

Nel S.I. l'unità di misura dell'intensità di corrente è l'ampere, che corrisponde a un flusso di cariche di 1 coulomb, ossia circa 6×10^{18} portatori di carica, che attraversano la superficie ogni secondo.

Come primo esempio tenteremo di stimare l'intensità di corrente associata al moto dell'elettrone all'interno dell'atomo d'idrogeno quando si trova nello stato energetico fondamentale. In accordo col modello di Bohr l'elettrone si muove di moto circolare uniforme lungo un'orbita di raggio a_B , come mostrato nella Fig. 8.3a. Il momento angolare dell'elettrone nello stato fondamentale è pari esattamente ad \hbar .

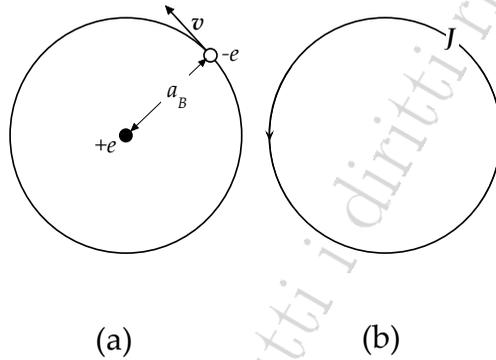


Figura 8.3: L'elettrone nello stato stazionario dell'atomo di idrogeno (a) e la linea di corrente equivalente (b).

Per stimare l'intensità di corrente associata all'elettrone è sufficiente moltiplicare la carica elementare per la frequenza del moto circolare. Quest'ultima si ottiene esplicitando il momento angolare elettronico come segue:

$$\hbar = m_e a_B^2 \omega, \quad (8.3)$$

dove $\omega = 2\pi/T$, T essendo il periodo orbitale. Sostituendo l'espressione di a_B nella (8.3), ricavando la frequenza $1/T$ e moltiplicandola per e si ottiene infine la corrente elettronica desiderata,

$$i = k_0^2 \frac{m_e e^4}{2\pi\hbar^2} \sim 1 \text{ mA} \quad (8.4)$$

Come secondo esempio proviamo a stimare l'ordine di grandezza della velocità di *drift* degli elettroni contenuti all'interno di un conduttore solido, p.e. rame. A questo scopo immaginiamo che il filo abbia una sezione dell'ordine del mm^2 , ossia di $S \sim 10^{-6} \text{ m}^2$, e che scorra in esso una corrente di 1 A. Abbiamo visto che l'ordine di grandezza della

densità del conduttore è 1 g/cm^3 , ovvero in un cm^3 sono contenuti circa 10^{23} atomi e, dunque, altrettanti elettroni di conduzione. Ciò implica che la densità di carica in movimento sarà dell'ordine di $\rho \sim 10^{23} \times 10^6 \times 10^{-19} = 10^{10} \text{ C/m}^3$. Dalla definizione d'intensità di corrente (8.2) abbiamo infine

$$1 \text{ A} \sim S\rho v \sim 10^{-6} \times 10^{10} \times v \implies v \sim 10^{-4} \text{ m/s}, \quad (8.5)$$

ossia del decimo di millimetro al secondo.

Se l'intensità di corrente è calcolata attraverso una superficie S chiusa assume un significato fisico ben preciso: essa rappresenta la quantità di carica che, nell'unità di tempo, *lascia* il volume V contenuto all'interno di S , come schematizzato nella Fig. 8.4.

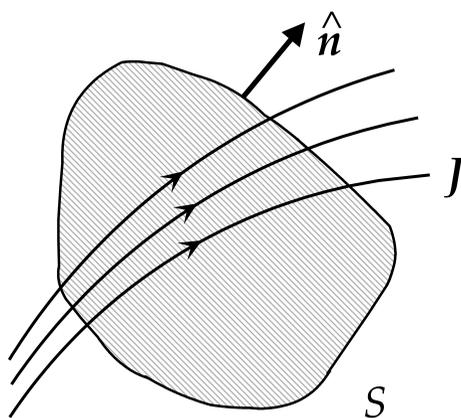


Figura 8.4: L'equazione di continuità.

In termini matematici scriveremo

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV \quad (8.6)$$

che prende il nome di *equazione di continuità* e rappresenta la legge di conservazione della carica elettrica. In altri termini nessuna carica può “sparire” o “apparire” in una regione dello spazio, a meno che non stia viaggiando verso o provenendo da qualche altra regione.

8.2 Correnti elettriche nei conduttori: legge di Ohm

Per mettere in movimento una carica elettrica è necessario un campo elettrico che agisca sul portatore.¹ Le caratteristiche della corrente prodotta ponendo un mezzo conduttore in un campo elettrico esterno dipendono fortemente dalla natura fisica del mezzo stesso. Esiste un'ampia classe di materiali conduttori in cui la densità di corrente in ogni punto risulta essere *proporzionale* al campo elettrico applicato. La costante di proporzionalità dipende unicamente dalla sostanza di cui è fatto il materiale conduttore e non, per esempio, dalla sua forma. In formule scriveremo

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (8.7)$$

dove σ indica la cosiddetta *conducibilità* del materiale.² Alternativamente scriveremo

$$\mathbf{E} = \rho \mathbf{J} \quad (8.8)$$

essendo $\rho = 1/\sigma$ la *resistività*.

La legge di Ohm scritta nella forma (8.7) o nella forma (8.8) fa riferimento a grandezze di tipo locale, ossia i campi. Nell'ingegneria elettrotecnica si è più spesso interessati a relazioni tra grandezze integrali quali differenze di potenziale e intensità di corrente, facilmente misurabili a livello macroscopico. In Fig. 8.5 è schematizzata una situazione elettrica tipica all'interno di un tratto cilindrico conduttore di lunghezza l e sezione S immerso in un campo elettrostatico \mathbf{E} .

La d.d.p. tra le due sezioni terminali del cilindro, A e B , è pari a

$$V_A - V_B = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = El = \rho J l, \quad (8.9)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato la (8.8). D'altro canto l'intensità di corrente, supposta costante in tutte le sezioni del cilindro, è

$$i = \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = JS, \quad (8.10)$$

¹Vi sono altri metodi, p.e., di natura meccanica, per generare correnti elettriche, ma non li prenderemo in considerazione.

²Il lettore stia attento a non confondere il simbolo con quello già utilizzato per la densità superficiale di carica elettrica.

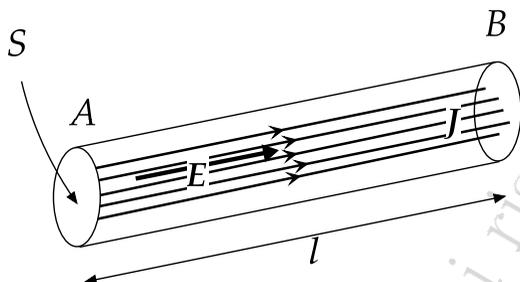


Figura 8.5: La legge di Ohm.

che, insieme alla (8.9), dà infine la forma integrale della legge di Ohm,

$$\boxed{V_A - V_B = Ri} \quad (8.11)$$

dove il simbolo R denota la cosiddetta *resistenza elettrica* del conduttore, definita attraverso la seguente formula:

$$R = \rho \frac{l}{S}. \quad (8.12)$$

L'unità di misura della resistenza nel S.I. è l'ohm (simbolo Ω), corrispondente alla resistenza di un conduttore nel quale, in seguito all'applicazione di una d.d.p. di 1 volt ai suoi capi, si stabilisce una corrente elettrica avente intensità di 1 ampere. Dalla (8.12) otteniamo anche l'unità di misura della resistività che, nel S.I., è l' Ωm . I valori tipici per la resistività di molti materiali conduttori è dell'ordine di $10^{-8} \Omega\text{m}$.

La caratterizzazione delle proprietà resistive di un conduttore tramite un singolo numero (la resistenza appunto) è possibile a patto che il rapporto tra la d.d.p. applicata e l'intensità di corrente prodotta si mantenga ragionevolmente costante al variare delle grandezze elettriche suddette. In questi casi è lecito sostituire al componente fisico un simbolo topologico che viene genericamente denominato *resistore* (o, più comunemente, resistenza). Definiamo allora *circuito elettrico* o, *rete*, un insieme di resistori uniti gli uni agli altri da fili conduttori aventi valori di resistenza trascurabili. Accenniamo solo brevemente al fatto che reti

resistive complesse possono essere “semplificate” attraverso alcune leggi di carattere topologico. I casi di elementi in serie o in parallelo sono i più semplici e sono esemplificati nella Fig. 8.6.

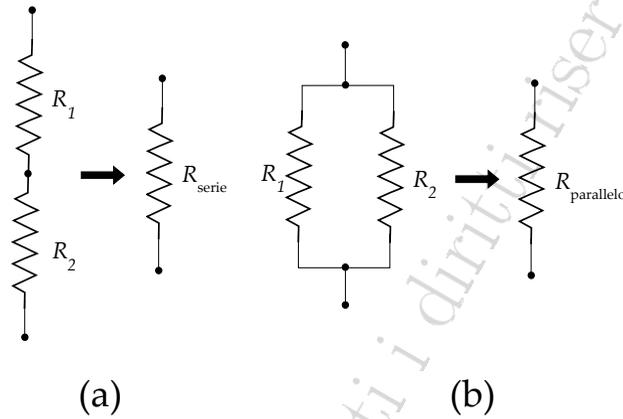


Figura 8.6: Resistenze in serie (a) e in parallelo (b).

Per una combinazione tipo quella rappresentata in Fig. 8.6a con due resistori in serie, la resistenza equivalente è³

$$R_{serie} = R_1 + R_2, \quad (8.13)$$

mentre per la combinazione di Fig. 8.6b, con i resistori in parallelo, si ha⁴

$$\frac{1}{R_{parallelo}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \implies R_{parallelo} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (8.14)$$

³Il lettore lo dimostri.

⁴Il lettore lo dimostri.

Capitolo 9

Lezione 29 maggio 2017

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \equiv 0$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 4\pi k_0 \int_V \rho dV$$

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV$$

9.1 Correnti elettriche stazionarie

Parliamo di correnti elettriche stazionarie quando la densità di corrente si mantiene invariata nel tempo in ogni punto dello spazio. È importante evidenziare le conseguenze di tale ipotesi sulla struttura delle linee di forza di \mathbf{J} . Ricordiamo che esso deve soddisfare l'equazione di continuità (8.6), ossia il principio di conservazione della carica. Per l'ipotesi di stazionarietà il secondo membro della (8.6) deve essere nullo,

$$\frac{d}{dt}(\cdot) = 0 \implies \oint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \equiv 0 \quad (9.1)$$

ossia il flusso di \mathbf{J} attraverso una qualsiasi superficie chiusa deve essere identicamente nullo. In altri termini un campo di densità di corrente

stazionario è solenoidale e, dunque, le sue linee di campo saranno necessariamente chiuse. In Fig. 9.1 abbiamo riportato due semplici esempi di correnti elettriche, una non stazionaria e l'altra stazionaria.

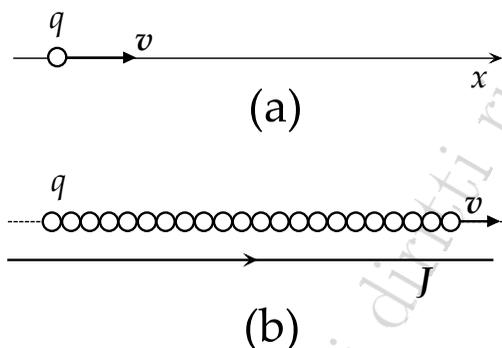


Figura 9.1: Una corrente elettrica non stazionaria (a) e una corrente elettrica stazionaria (b).

La prima, schematizzata nella Fig. 9.1a, è quella associata al moto rettilineo uniforme di una singola carica.¹ Nella Fig. 9.1b, invece, è schematizzata la corrente associata a un insieme infinito di identiche cariche elettriche che si muovono uniformemente su una retta, ciascuna di esse in contatto con le prime vicine, un po' come le perle infilte in una collana.²

9.2 Azioni meccaniche su correnti

Abbiamo accennato al fatto che la forma più generale della forza esercitata su una carica di prova q è la forza di Lorentz

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (9.2)$$

essendo \mathbf{v} la velocità vettoriale della carica e \mathbf{B} un nuovo campo vettoriale che abbiamo denominato *campo magnetico*. Il nostro nuovo obiettivo sarà quello di caratterizzare le proprietà fondamentali di \mathbf{B} ossia,

¹Il lettore spieghi perché non può essere una corrente stazionaria.

²Il lettore spieghi in questo caso la solenoidaltà di \mathbf{J} .

in accordo col teorema di Helmholtz, esprimerne circuitazione e flusso attraverso una superficie chiusa. Per il momento, tuttavia, ci limiteremo a studiare alcune semplici ma fondamentali implicazioni della (9.2) prescindendo da ciò che ha generato il campo magnetico.

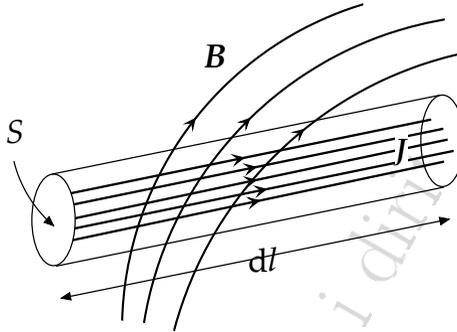


Figura 9.2: Azione meccanica di un campo magnetico su un elemento infinitesimo di conduttore percorso da corrente.

La Fig. 9.2 mostra un tratto (infinitesimo) di un conduttore filiforme percorso da una corrente elettrica stazionaria le cui linee di campo sono confinate all'interno del filo. Supporremo altresì che nella regione di spazio eventuali campi elettrici esterni siano perfettamente schermati. Se indichiamo con n il numero di portatori di carica per unità di volume, il numero di cariche del volume $S dl$ del tratto di conduttore è pari a $nSdl$. La forza magnetica $d\mathbf{F}$ agente sul volume è pari alla somma delle forze agenti su ciascuna carica, ossia

$$d\mathbf{F} = (qnSdl)(\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (9.3)$$

ovvero, ricordando che $qn\mathbf{v} = \mathbf{J}$,

$$d\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} S dl. \quad (9.4)$$

Il prodotto $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ rappresenta dunque una sorta di “densità di forza magnetica”. Possiamo riscrivere la (9.4) in una forma matematicamente equivalente ma maggiormente significativa da un punto di vista pratico. A questo scopo è sufficiente notare che il prodotto $\mathbf{J}S$ è l'intensità di

corrente che attraversa il filo conduttore. Introducendo l'elemento infinitesimo $d\mathbf{l}$ orientato secondo il verso della corrente, la (9.4) prende la forma

$$\boxed{d\mathbf{F} = i d\mathbf{l} \times \mathbf{B}} \quad (9.5)$$

come schematizzato nella Fig. 9.3.

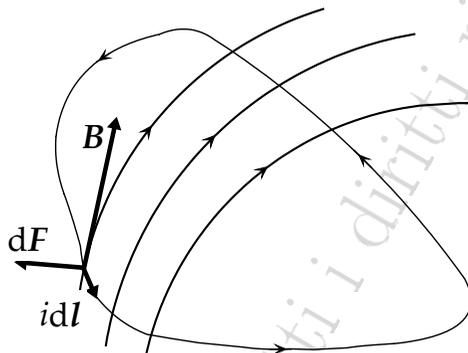


Figura 9.3: La forza magnetica su una corrente.

La (9.5) mostra che la forza magnetica esercitata su un filo percorso da cariche in movimento dipende unicamente dall'intensità di corrente e non dal valore delle cariche portate da ciascuna particella o addirittura dal proprio segno. Essa costituisce il principio di funzionamento dei motori elettrici.

9.3 Il moto di una particella in un campo magnetico

Riprendiamo nuovamente in esame la forza di Lorentz

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (9.6)$$

studiando il moto di una singola particella carica in presenza di un campo magnetico esterno \mathbf{B} , come mostrato nella Fig. 9.4. Dalla (9.4) si evince come la forza \mathbf{F} sia costantemente ortogonale alla traiettoria di moto. Conseguentemente, per il teorema delle forze vive, il lavoro sulla particella sarà nullo e la sua energia rimarrà costante. In altri termini la

carica si muoverà di moto circolare uniforme descrivendo una traiettoria avente raggio R pari a³

$$R = \frac{mv}{qB}, \quad (9.7)$$

mentre il verso di percorrenza (orario ovvero antiorario) misurato rispetto alla direzione di \mathbf{B} dipenderà esclusivamente dal segno di q , come schematizzato nella Fig. 9.4.

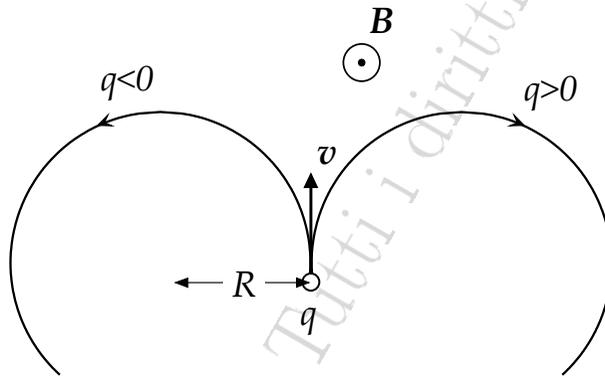


Figura 9.4: Moto della carica nel campo magnetico.

È ben noto che la Terra è costantemente bombardata da uno sciame di particelle cariche provenienti ad altissima velocità dallo spazio, i cosiddetti *raggi cosmici*. Le ricerche, iniziate alla fine del diciannovesimo secolo, mostrarono sin da subito che i raggi erano costituiti da particelle cariche estremamente veloci. Per stimarne massa e carica venivano utilizzate camere a nebbia allo scopo di “disegnare” le traiettorie delle particelle in presenza di forti campi magnetici applicati. Carl Anderson fu il primo a notare che nelle lastre fotografiche spesso apparivano due tipi di tracce che avevano curvature opposte ma simili, proprio come quelle illustrate nella Fig. 9.4. Il raggio di curvatura misurato era compatibile con quello di un elettrone, e dunque alcune di esse sembravano predire l’esistenza di elettroni aventi carica positiva, i cosiddetti *positroni*, un fatto teorizzato qualche anno prima da Paul Dirac. D’altro

³ Il lettore lo dimostri.

canto la presenza di tracce “anomale” poteva essere anche spiegata ipotizzando che esse fossero percorse da elettroni ma in senso opposto alle altre. Per escludere tale possibilità Anderson inserì una lastra di piombo nella camera a nebbia e analizzò le tracce delle particelle che l’avevano attraversata. Poiché, in seguito all’attraversamento, la velocità delle particelle deve diminuire, dalla (9.5) segue che la traiettoria dovrà necessariamente presentare una maggiore curvatura, come schematizzato nella Fig. 9.5.

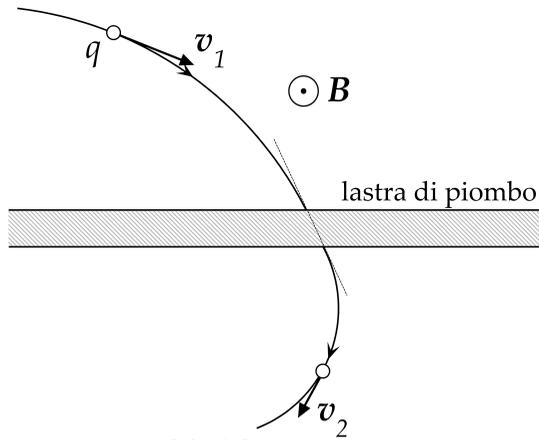


Figura 9.5: La scoperta del positrone.

In tal modo il verso in cui le tracce sono percorse può essere univocamente determinato e l'esistenza dei positroni fu così dimostrata.

Capitolo 10

Lezione 30 maggio 2017

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \equiv 0$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 4\pi k_0 \int_V \rho dV$$

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV$$

10.1 Le proprietà del campo magnetico

Il campo magnetico, al pari del campo elettrico, è un artificio matematico volto a descrivere le complesse interazioni tra particelle cariche. La conoscenza del campo magnetico in una regione dello spazio, in particolare, permette di predire la parte di forza dipendente dalla velocità che una qualsiasi particella carica subirebbe trovandosi a passare in una certa posizione con una data velocità. Possedere quest'informazione rende superflua e non necessaria la conoscenza delle posizioni e velocità delle cariche sorgenti. In altri termini possiamo pensare al campo come una sorta d'intermediario dell'interazione tra cariche. È per questa ragione che si pensa ad esso come a un'entità dotata di "vita indipendente".

Ma quali sono le proprietà del campo magnetico secondo le indicazioni del teorema di Helmholtz? Rispondere a questa domanda equivale,

in termini puramente matematici, a completare il seguente schema:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = ?$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = ?$$
(10.1)

Analogamente a quanto succede per il campo elettrostatico una delle equazioni descrive una proprietà indipendente dal posizionamento e dall'intensità delle sorgenti che si esprime attraverso una precisa caratteristica topologica delle sue linee di forza. Nel caso di \mathbf{E} tale proprietà è la conservatività. Per il campo magnetico essa prende il nome di *solenoidalità* e implica che le linee di forza debbono essere necessariamente *chiuse*. La prima delle (10.1), invece, pone in relazione il campo \mathbf{B} direttamente con le sorgenti che, nel caso stazionario, sono le correnti elettriche.

10.2 La legge di Biot-Savart

Abbiamo dedotto le proprietà fondamentali del campo elettrostatico partendo dalla legge di Coulomb. Esiste qualcosa di analogo per il campo magnetico che permetta in qualche modo di completare la (10.1)? La risposta è affermativa e prende il nome di legge di Biot-Savart. Di seguito ne proponiamo una derivazione “mnemonica” (tutt'altro che rigorosa) che aiuterà a mettere in luce alcune interessanti analogie formali tra \mathbf{E} e \mathbf{B} . Consideriamo la Fig. 10.1, dove nella parte (a) è mostrato lo schema di principio per il calcolo del campo elettrostatico generato da una carica distribuita in un volume finito dello spazio V con densità ρ . In particolare, il contributo (infinitesimo) $d\mathbf{E}$ al campo elettrostatico nel punto P dovuto all'elemento infinitesimo di carica $dq = \rho dV$ si ottiene applicando la legge di Coulomb,

$$d\mathbf{E} = k_0 \frac{\rho dV \hat{\mathbf{r}}}{r^2}. \quad (10.2)$$

Analizziamo la struttura matematica della (10.2): c'è un fattore k_0 , un fattore $1/r^2$, e il versore $\hat{\mathbf{r}}$ che va dall'elemento “sorgente” ρdV al punto di osservazione P . Calcoliamo adesso il campo magnetico \mathbf{B} generato

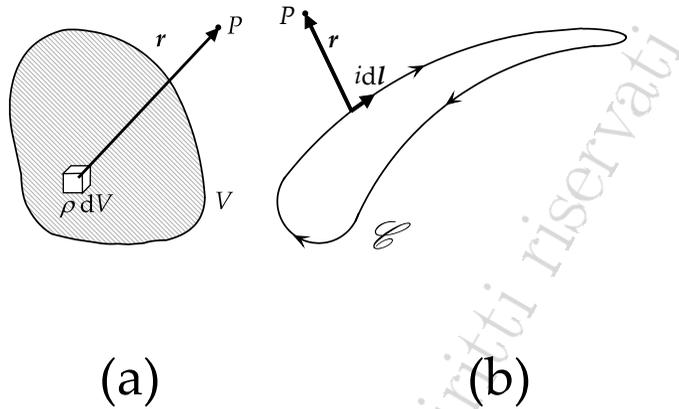


Figura 10.1: Derivazione euristica della legge di Biot-Savart.

in un punto P da una densità di corrente stazionaria confinata all'interno di un filo conduttore. In virtù della solenoidaltà di \mathbf{J} (siamo in condizioni stazionarie) il filo deve necessariamente formare un circuito, diciamo \mathcal{C} , come mostrato nella Fig. 10.1b. Inoltre caratterizzeremo la corrente elettrica all'interno del filo tramite la sola intensità i . Ciò è possibile dal fatto che il circuito è supposto essere filiforme. Dall'analisi delle Figg. 10.1a e 10.1b si evince chiaramente la natura *vettoriale* delle sorgenti del campo magnetico rispetto a quella *scalare* delle sorgenti del campo elettrostatico. In particolare l'elemento di sorgente è il vettore infinitesimo $i d\mathbf{l}$. Scriveremo il contributo al campo magnetico nel punto P procedendo per analogia con la (10.2). Sarà presente un fattore k_0/r^2 , ma questa volta dovremo combinare l'elemento di sorgente $i d\mathbf{l}$ con il versore $\hat{\mathbf{r}}$ in maniera tale da produrre ancora un vettore. Una possibilità è prenderne il prodotto vettoriale, così da scrivere

$$d\mathbf{B} \propto k_0 \frac{i d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}. \quad (10.3)$$

Questa espressione non è corretta dimensionalmente, in quanto campi magnetici e campi elettrici differiscono per un fattore che ha le dimensioni di una velocità, come evince dalla (9.2). Per correggere la (10.3) è necessario dividere il secondo membro per il quadrato di una velocità. Ora, si trova che questa velocità coincide con la velocità della luce nel

vuoto, che indicheremo col simbolo c . In questo modo, sommando i contributi provenienti da ogni elemento infinitesimo di corrente del circuito \mathcal{C} si perviene infine alla celebre *formula di Biot-Savart*

$$\mathbf{B} = \frac{k_0}{c^2} i \oint_{\mathcal{C}} \frac{d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (10.4)$$

che permette di calcolare il campo magnetico prodotto da un *qualsiasi* circuito percorso da correnti stazionarie (continue). Sebbene la (10.4) faccia riferimento a una situazione a dir poco realistica (circuiti filiformi), è possibile utilizzarla per ricavare le due proprietà fondamentali dei campi magnetostatici.

A questo scopo applichiamo la (10.4) al calcolo del campo generato nei punti dell'asse di una spira circolare di raggio a percorsa da un corrente avente intensità i , come schematizzato nella Fig. (10.2).

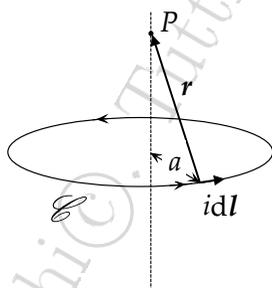


Figura 10.2: Il campo magnetico generato da una spira circolare.

Per calcolare l'integrale nella (10.4) utilizzeremo la geometria mostrata nella Fig. 10.3, dalla quale si evince come, a causa della simmetria del problema, il campo magnetico in asse debba essere necessariamente parallelo ad esso. In altri termini, l'asse della spira è una linea di forza del campo magnetico da essa generato. Abbiamo

$$dB = \frac{k_0}{c^2} i \frac{dl}{r^2} \cos \theta, \quad (10.5)$$

dove (vedi Fig. 10.3) $\cos \theta = a/r$, cosicché

$$dB = \frac{k_0}{c^2} i \frac{a}{r^3} dl, \quad (10.6)$$

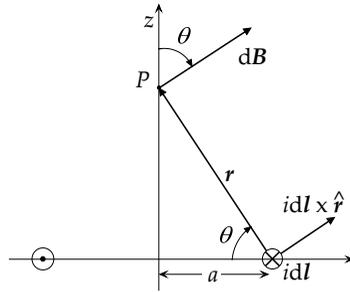


Figura 10.3: Geometria per il calcolo dell'integrale (10.4).

essendo $r^2 = a^2 + z^2$. Integrando la (10.6) su tutta la spira e tenendo conto che $\oint_C dl$ coincide con la sua lunghezza, otteniamo infine il modulo del campo magnetico

$$B = \frac{2\pi k_0}{c^2} i \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (10.7)$$

L'apparente semplicità del risultato è ovviamente legata al fatto che il campo magnetico è stato calcolato sull'asse della spira. È sufficiente "muoversi" dall'asse perché l'integrale (10.4) diventi non più calcolabile in forma chiusa. Cionondimeno la (10.7) permette di ottenere importanti informazioni circa le proprietà generali del campo magnetico. Vediamo innanzitutto come la linea di forza appena trovata sia una linea *chiusa*, e ciò implica che il campo magnetico generato dalla spira circolare non potrà essere conservativo.

In realtà, ciò che viene postulato è che le linee di forza di un generico campo magnetico sono chiuse. Questa proprietà si traduce matematicamente nel fatto che il flusso di un campo magnetico generato da un'arbitraria distribuzione di corrente attraverso una qualsiasi superficie chiusa deve essere identicamente nullo,

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \equiv 0 \quad (10.8)$$

La (10.8) esprime la prima proprietà fondamentale del campo magnetico, la *solenoidalità*.

Nel limite asintotico $z \gg a$ la (10.7) diviene

$$B \sim \frac{2k_0}{c^2} \frac{iS}{z^3}, \quad z \gg a, \quad (10.9)$$

dove S indica l'area racchiusa dalla spira. In questa espressione del campo magnetico vi sono due aspetti che vale la pena sottolineare. *In primis* l'intensità del campo magnetico è inversamente proporzionale alla *terza* potenza della distanza della spira. In altri termini, pensando la spira come una sorta di sorgente elementare "puntiforme" di campo magnetico, vediamo che il campo così generato decresce molto più rapidamente con la distanza rispetto a quanto succede nel caso elettrostatico, laddove la legge di Coulomb predice un decadimento proporzionale a z^{-2} per il campo generato da una sorgente puntiforme. La presenza del fattore iS nella (10.9) rivela che il termine di sorgente per il campo magnetico è il prodotto dell'intensità di corrente che scorre nella spira per l'area della spira stessa. A questo occorre aggiungere che la *direzione* del campo magnetico è univocamente determinata dalla giacitura della spira e dal verso di percorrenza della corrente. Tutto questo si può descrivere introducendo un vettore, che prende il nome di *momento di dipolo magnetico* così definito: la direzione è quella ortogonale al piano della spira, il verso quello dal quale si vede la corrente elettrica scorrere nella spira in senso *antiorario* e il modulo pari al prodotto dell'intensità di corrente per l'area della spira. In altri termini le sorgenti del campo magnetico hanno una natura *vettoriale*, al contrario di quelle del campo elettrostatico che sono sorgenti di tipo *scalare*.

Un altro aspetto di una certa rilevanza ha a che fare con la presenza del fattore π in alcune delle leggi fondamentali dell'elettromagnetismo, quale per esempio la legge di Gauss. Allo scopo di "razionalizzare" il sistema di unità di misura, ossia eliminare questi fattori irrazionali, si introducono due nuovi simboli, ϵ_0 e μ_0 , chiamati rispettivamente *permeabilità dielettrica* e *permeabilità magnetica* del vuoto. La prima è definita tramite la relazione

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k_0} \quad (10.10)$$

mentre la seconda è definita come

$$\mu_0 = \frac{4\pi k_0}{c^2} \quad (10.11)$$

Si ottiene così la fondamentale relazione che lega le proprietà elettriche e magnetiche del vuoto

$$\boxed{\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}} \quad (10.12)$$

Il valore numerico della permeabilità magnetica è, misurato in N/A^2 , pari *esattamente* a $4\pi \times 10^{-7}$. Da questo e dalla (11.3), tenendo conto che la velocità della luce nel vuoto è circa 3×10^8 m/s, si ottiene infine per k_0 la stima numerica di circa 9×10^9 precedentemente utilizzata. In termini di queste “nuove” costanti il teorema di Gauss prende la forma

$$\boxed{\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV} \quad (10.13)$$

mentre per la legge di Biot-Savart avremo¹

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \oint_C \frac{d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}, \quad (10.14)$$

¹Si potrebbe obiettare circa la presenza del fattore 4π nella (11.5). Quest'ultima, però, non rappresenta una legge di carattere fondamentale, a differenza della (10.8). Vedremo nella prossima lezione il ruolo giocato dalla permeabilità magnetica μ_0 nella legge di Ampère.

Capitolo 11

Lezione 31 maggio 2017

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \equiv 0$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \equiv 0$$

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV$$

11.1 Il campo magnetico generato da un filo indefinito

Prima di affrontare lo studio della seconda legge fondamentale della magnetostatica, la cosiddetta legge di Ampère, applichiamo ancora una volta la (11.5) per calcolare il campo magnetico generato da un'altra semplice distribuzione di corrente stazionaria, quella di un filo rettilineo indefinito, schematizzato nella Fig. 11.1. In virtù della simmetria cilindrica del problema e sfruttando la solenoidalità di \mathbf{B} non è difficile convincersi del fatto che le linee di forza del campo magnetico generato dalla corrente rettilinea sono circonferenze ortogonali al filo e coassiali

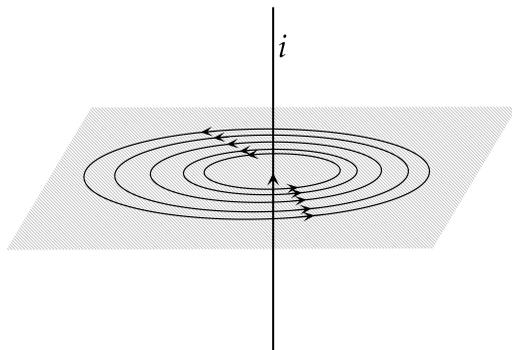


Figura 11.1: Le linee del campo magnetico generato da un filo rettilineo indefinito.

ad esso, come schematizzato nella Fig. 11.1. Per calcolare il modulo di \mathbf{B} ci riferiremo alla geometria in Fig. 11.2, dove è stato introdotto il piano cartesiano xz ortogonale alla direzione del campo magnetico. Indicheremo inoltre col simbolo d la distanza del punto P dal filo.

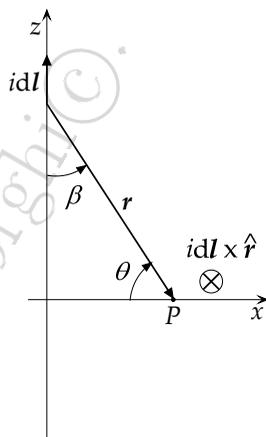


Figura 11.2: Geometria per il calcolo del campo magnetico generato da un filo rettilineo indefinito.

Per il modulo del prodotto vettoriale $d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}$ abbiamo

$$|d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}| = dl \cos \theta = dz \cos \theta, \quad (11.1)$$

mentre applicando il teorema di Pitagora si ottiene

$$r^2 = d^2 + z^2. \quad (11.2)$$

Sostituendo la (11.1) e la (11.2) nella (11.5) abbiamo

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} i \oint_C \frac{dz}{d^2 + z^2} \cos \theta, \quad (11.3)$$

ovvero, tenendo conto che $\cos \theta = d/r$,

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} i d \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(d^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (11.4)$$

Il calcolo dell'integrale (11.4) non è affatto banale e, in generale, non viene affrontato in corsi elementari di Analisi Matematica. Vogliamo adesso mostrare come il calcolo del campo possa essere condotto per altra via, semplicemente scegliendo una variabile d'integrazione diversa da z . Dalla Fig. 11.2 scegliamo come nuova variabile l'angolo θ . In questo modo, dalla relazione $z = d \tan \theta$, abbiamo

$$dz = \frac{d}{\cos^2 \theta} d\theta, \quad (11.5)$$

che, sostituita nella (11.3) insieme all'ovvia relazione $r = d/\cos \theta$, dà

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{1}{d} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{d}. \quad (11.6)$$

È interessante notare come, dal confronto tra la (11.4) e la (11.6), si ottenga l'interessante formula integrale

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(d^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{2}{d^2}} \quad (11.7)$$

che sarà utilizzata a breve.

11.2 La legge di Ampère

Siamo quasi pronti a enunciare la seconda legge fondamentale della magnetostatica. Per quanto visto sinora, poiché le linee di forza di \mathbf{B} sono chiuse se ne deduce che la circuitazione $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ non potrà certo essere identicamente nulla. Abbiamo anche due esempi di calcolo esatto del campo magnetico, quello della spira circolare in asse e quello del filo rettilineo. Cominciamo dal primo e calcoliamo la circuitazione del campo magnetico lungo la linea di forza, ossia l'asse z mostrato nella Fig. 11.3.

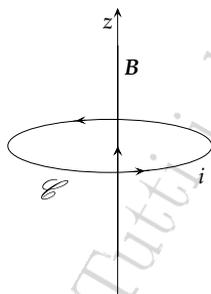


Figura 11.3: Geometria per il calcolo della circuitazione di \mathbf{B} sull'asse della spira.

Tenendo conto della (10.7) abbiamo per la circuitazione la seguente espressione:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0}{2} i a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(a^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (11.8)$$

ovvero, ricordando la (11.7),

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i. \quad (11.9)$$

Ripetiamo adesso il calcolo della circuitazione considerando una delle linee di forza del campo magnetico generato da un filo rettilineo indefinito, come schematizzato nella Fig. 11.4. Prendiamo la circonferenza avente un generico raggio r . In tutti i suoi punti dove il modulo del campo magnetico è pari a $B(r) = \mu_0 i / 2\pi r$.

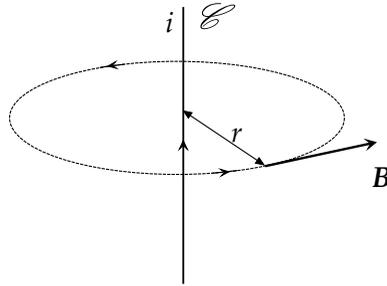


Figura 11.4: Geometria per il calcolo della circuitazione di \mathbf{B} generato da un filo rettilineo indefinito lungo una linea di forza.

In questo caso il calcolo dell'integrale di linea è banale, in virtù della già citata simmetria assiale del problema. Abbiamo infatti

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C B dl = B \oint_C dl = 2\pi r B(r) = \mu_0 i, \quad (11.10)$$

un risultato interessante, visto che non dipende dalla linea di forza scelta per il calcolo dell'integrale. A questo punto vale la pena chiedersi se la (11.10) continui a valere dando al circuito C una forma qualsiasi, purché circonda il filo, come schematizzato nella Fig. 11.5.

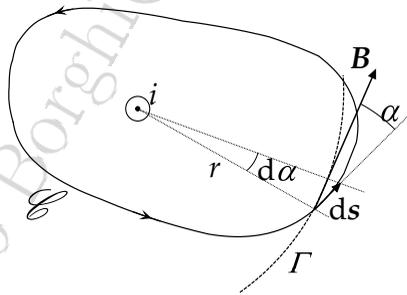


Figura 11.5: Geometria per il calcolo della circuitazione di \mathbf{B} generato da un filo rettilineo indefinito lungo una qualsiasi linea chiusa.

Calcolando l'integrale abbiamo

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C B \cos \alpha dl = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \oint_C \frac{dl \cos \alpha}{r}. \quad (11.11)$$

Guardando la figura è facile rendersi conto che la quantità $d\mathbf{l} \cos \alpha$ coincide con la lunghezza dell'elemento di linea ottenuto proiettando il vettore $d\mathbf{l}$ sulla circonferenza Γ centrata sul filo e avente raggio r . In altri termini possiamo identificare l'integrando nella (11.11) con l'angolo $d\alpha$ sotto il quale l'elemento $d\mathbf{l}$ è visto dal filo. Abbiamo così

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \oint_{\mathcal{C}} d\alpha = \mu_0 i. \quad (11.12)$$

Se, al contrario, il circuito \mathcal{C} fosse scelto in modo tale da non circondare il filo, come per esempio mostrato nella Fig. 11.6, è facile rendersi conto che in questo caso la circuitazione sarebbe nulla.¹

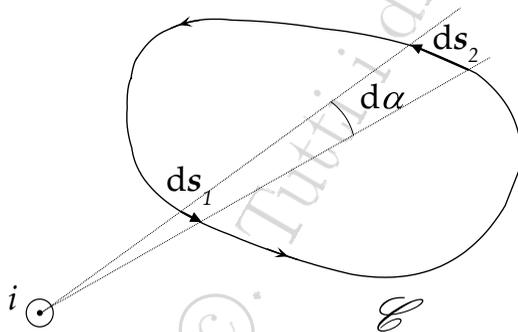


Figura 11.6: Geometria per il calcolo della circuitazione di \mathbf{B} quando il filo rettilineo indefinito non è “circondato” dal circuito.

Non è difficile notare alcune interessanti analogie con la legge di Gauss. In entrambi i casi la natura dell'integrale è *topologica*. Così come il flusso del campo \mathbf{E} attraverso una superficie chiusa dipende dal solo fatto che la carica sia interna ovvero esterna alla superficie, così la circuitazione del campo \mathbf{B} dipende dal fatto che il circuito circonda o no il filo generatore. Questo concetto può essere reso matematicamente più trasparente scrivendo la circuitazione come segue:

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i_{\mathcal{C}}, \quad (11.13)$$

¹La dimostrazione è lasciata per esercizio al lettore. Come possibile suggerimento, si tenga presente quanto visto a proposito del teorema di Gauss.

dove il simbolo i_C indica la cosiddetta *intensità di corrente concatenata*. Nel caso particolare del filo indefinito, $i_C = i$ nel caso della Fig. 11.5, laddove $i_C = 0$ nel caso illustrato nella Fig. 11.6. Volendo trovare una definizione di i_C matematicamente non ambigua ricordiamo che (per definizione appunto) un'intensità di corrente può sempre essere pensata come il flusso della densità di corrente \mathbf{J} calcolato attraverso un'opportuna superficie aperta.² Questa superficie è chiamata superficie concatenata col circuito \mathcal{C} ed è ben illustrata nella Fig. 11.7. Si tratta di una superficie aperta, diciamo S_C , il cui bordo coincide proprio col circuito \mathcal{C} .

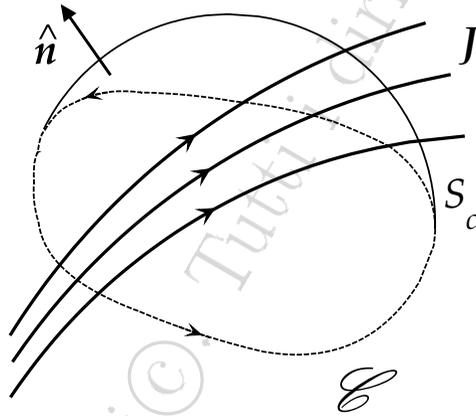


Figura 11.7: La legge di Ampère .

Ovviamente, di superfici concatenate con una data linea chiusa \mathcal{C} ce ne sono infinite. Tuttavia, in virtù della stazionarietà, e quindi della solenoidalità, di \mathbf{J} , il flusso concatenato non può dipendere dalla superficie scelta. In altri termini, l'intensità di corrente concatenata dipende esclusivamente da \mathcal{C} e da \mathbf{J} . La seconda legge fondamentale della magnetostatica si scrive dunque come segue:

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_{S_C} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (11.14)$$

e prende il nome di *legge di Ampère* .

²Il lettore spieghi perché la superficie non può essere chiusa.