Corso di elettrotecnica*
Materiale didattico: reti a due porte

A. Laudani

8 gennaio 2007

Si consideri una rete accessibile da quattro morsetti distinti (1), (2), (3) e (4) e si supponga che siano presenti due porte, ad esempio (1)-(3) e (2)-(4), ossia che valgano per ogni istante le relazioni

$$i_1(t) = -i_3(t) \tag{1}$$

e

$$i_2(t) = -i_4(t) \tag{2}$$

In questo caso si parlerà di doppio bipolo o rete a 2 porte. Esempi di doppi bipoli sono il trasformatore ideale, la coppia di induttori mutuamente accoppiati, ecc. In generale ha interesse il comportamento di un doppio bipolo alle porte, ossia la coppia di relazioni tra le due tensioni e le due correnti di porta; queste impongono due vincoli alle quattro grandezze elettriche e lasciano loro due gradi di libertà.

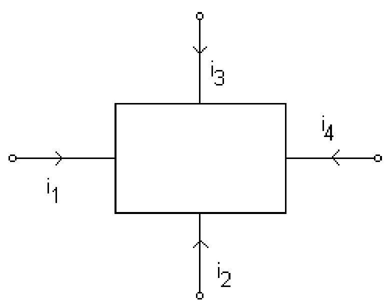

Figura 1: Rete accessibile da quattro morsetti o quadrupolo

*A.A. 2006/2007, C.d.L. in Ingegneria Informatica, 6 crediti, corso A-L, docente del corso l'ing. A Laudani, e-mail: alaudani@diees.unict.it

Per meglio chiarire questi concetti consideriamo la caratteristica generica di porta di un bipolo. Tale caratteristica può esprimersi nel caso generale tramite una funzione implicita del tipo

$$F(v, Dv, i, Di, t) = 0 \tag{3}$$

dove con il simbolo Dv e Di si sta indicando la dipendenza dalle derivate (di ordine arbitrario) della tensione e della corrente: questo sta ad indicare che il legame tra la tensione e la corrente imposto dal bipolo può essere in generale di tipo dinamico. La dipendenza esplicita dal tempo t nell'espressione precedente sta ad indicare invece la tempo varianza della caratteristica. Qualora sia possibile esplicitare la tensione o la corrente in funzione dell'altra grandezza elettrica alla porta, cioè ricavare espressioni del tipo

$$v = r(i, Di, t) \tag{4}$$

$$i = g(v, Dv, t) \tag{5}$$

avremo a che fare con un bipolo che può essere comandato o in corrente (4) o in tensione (5). Se inoltre il bipolo non è dinamico - non c'è la dipendenza dalle derivate delle grandezze tensione e corrente -, avremo a che fare con un bipolo resistivo (o adinamico). La situazione più interessante ai fini pratici è quella in cui il legame è espresso da un'equazione algebrica o integro-differenziale lineare tempo invariante, in quanto in questo caso è possibile scrivere il legame in maniera semplice, ad esempio in termini di impedenza o ammettenza in un dominio trasformato o in regime sinusoidale.

Se ora si introducono per il generico n-bipolo o circuito a n-porte le grandezze $[v]$ - vettore delle tensioni di porta - e $[i]$ - vettore delle correnti di porta-, si può ripetere quanto detto per il generico bipolo riferendosi questa volta a delle funzioni vettoriali (o ad un vettore di funzioni che ha dimensioni pari al numero di porte)

$$[F([v], D[v], [i], D[i], t)] = [0] \tag{6}$$

Nel caso particolare di doppi bipoli, che del resto è quello che interessa in questa trattazione, la dimensione dei vari vettori è pari a due, e si hanno due funzioni che regolano il comportamento delle quattro grandezze di porta, come già detto in precedenza

$$\begin{cases} F_1([v], D[v], [i], D[i], t) = 0 \\ F_2([v], D[v], [i], D[i], t) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

1 Doppi bipoli lineari tempo invarianti

Una rete a due porte (o più in generale una rete a n-porte) si dirà lineare tempo invariante (LTI) se e solo se essa è costituita da elementi lineari tempo invarianti e generatori indipendenti. Senza perdere di generalità considereremo nel resto della trattazione doppi bipoli LTI che non contengono alcun generatore e che non abbiano energia immagazzinata negli elementi a memoria, cioè a stato zero. Gli effetti di eventuali generatori indipendenti e di energia immagazzinata negli elementi a memoria possono essere tenuti in conto separatamente applicando il teorema di sovrapposizione degli effetti o ricorrendo alle rappresentazioni equivalenti alla Norton o Thevenin alle porte che sono a tutti gli effetti una generalizzazione dei teoremi di Thevenin e Norton per reti a n-porte. In questo caso lo schema equivalente alla Thevenin è presentato nella figura 2, dove con V_{o1} e V_{o2} sono le tensioni equivalenti a vuoto alla porta 1 e alla porta 2 rispettivamente.

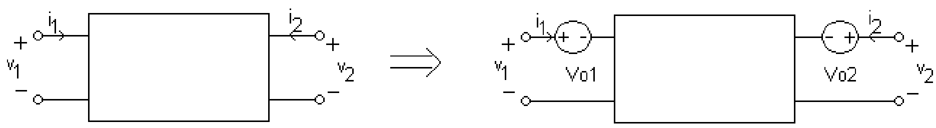

Figura 2: Rete a due porte ed equivalente di Thevenin alle porte

La rappresentazione più generale possibile per un doppio bipolo inerte che descrive il suo comportamento esclusivamente in termini delle grandezze alle due porte è la seguente

$$[A][v] + [B][i] = [0] \tag{8}$$

dove $[V] = [V_1, V_2]^T$ e $[I] = [I_1, I_2]^T$ sono i vettori di ordine due corrispondenti alle tensioni e alle correnti di porta. Le due matrici $[A]$ e $[B]$ rappresentano i legami presenti fra le varie grandezze di porta. I termini di tali matrici sono o numeri complessi se si stanno usando fasori o funzioni razionali fratte nella variabile p se si sta lavorando in un dominio trasformato (ad esempio. Laplace), ed in questo caso gli elementi di tali matrici sono funzioni di rete. La rappresentazione di un doppio bipolo mediante le matrici $[A]$ e $[B]$ è sempre possibile, ma richiede più parametri (esattamente 8, cioè 4 per ogni matrice) di quelli effettivamente necessari per la caratterizzazione della rete due porte. Per queste ragioni si preferisce utilizzare altre descrizioni che richiedono complessivamente solo 4 parametri per la caratterizzazione del doppio bipolo. Queste rappresentazioni si ottengono (almeno le più comuni) esplicitando due (variabili dipendenti) delle quattro grandezze elettriche alle porte in funzione delle altre due (variabili indipendenti).

Si può osservare a questo punto che

1. ad ogni scelta delle due grandezze corrisponde una rappresentazione diversa, ma in totale le scelte possibili sono 6, tante quante sono le coppie estraibili da un gruppo di quattro grandezze $[I_1, I_2]^T$, $[V_1, V_2]^T$, $[I_1, V_2]^T$, $[V_1, I_2]^T$, $[V_1, I_1]^T$, $[V_2, I_2]^T$;

2. l'esistenza di una data rappresentazione è legata alla condizione che le due grandezze della coppia estratta siano linearmente indipendenti: ad esempio non è possibile scegliere per il trasformatore ideale le due tensioni o le due correnti come variabili indipendenti;

3. non è detto che per un doppio bipolo esistano tutte e sei le suddette rappresentazioni; comunque ne esiste necessariamente una.

Questa seconda osservazione è facile da dimostrare in quanto, nel caso non degenere, le due equazioni sono linearmente indipendenti e quindi è possibile sicuramente esplicitare due grandezze in funzione delle altre due. I vari tipi di rappresentazioni risultano utili in situazioni diverse, ma comunque sono equivalenti e qualora esistano è possibile passare agevolmente da una rappresentazione ad un'altra. Di seguito vengono descritte in modo più dettagliato le varie rappresentazioni.

2 Matrici $[Z]$ e $[Y]$

La matrice $[Z]$, detta matrice delle impedenze di circuito aperto, e la matrice $[Y]$, detta matrice delle ammettenze di cortocircuito, mettono in relazione il vettore delle tensioni di porta $[V]$ con il vettore delle correnti di porta $[I]$. Consideriamo la rappresentazione mediante la matrice delle impedenze $[Z(p)]$ (2x2) o parametri z, questa si ottiene, se possibile, considerando come variabili indipendenti le correnti nelle porte:

$$\begin{cases} V_1(p) = Z_{11}(p) \cdot I_1(p) + Z_{12}(p) \cdot I_2(p) \\ V_2(p) = Z_{21}(p) \cdot I_1(p) + Z_{22}(p) \cdot I_2(p) \end{cases} \tag{9}$$

o in forma matriciale

$$[V(p)] = [Z(p)] \cdot [I(p)] \tag{10}$$

Il termine $Z_{11}(p)$ prende il nome di *impedenza di ingresso a vuoto*, essendo l'impedenza che si vede alla porta 1 quando la porta 2 è aperta ($I_2 = 0$)

$$Z_{11}(p) = \left.\frac{V_1(p)}{I_1(p)}\right|_{I_2=0} \tag{11}$$

, mentre $Z_{22}(p)$, per ragioni analoghe si chiama impedenza d'uscita a vuoto.

$$Z_{22}(p) = \left.\frac{V_2(p)}{I_2(p)}\right|_{I_1=0} \tag{12}$$

I termini ingresso e uscita si riferiscono alla porta 1 e 2 rispettivamente. I termini $Z_{12}(p)$ e $Z_{21}(p)$ prendono il nome di impedenze mutue o di trasferimento, in quanto esprimono l'influenza delle grandezze elettriche di una porta su quelle dell'altra porta. La definizione operativa delle $Z_{ij}(p)$ per gli elementi non diagonali è

$$Z_{12}(p) = \left.\frac{V_1(p)}{I_2(p)}\right|_{I_1=0} \tag{13}$$

$$Z_{21}(p) = \left.\frac{V_2(p)}{I_1(p)}\right|_{I_2=0} \tag{14}$$

Per determinare $Z_{12}(p)$ si collega un generatore di corrente alla porta 2 e si valuta la tensione alla porta 1 aperta, calcolando il rapporto tra queste due grandezze. Analogo discorso può ripetersi per la $Z_{21}(p)$.

In generale il doppio bipolo può ammettere anche la rappresentazione duale a quella mediante parametri z, la matrice delle ammettenze $[Y]$. Secondo questa rappresentazione si ha:

$$\begin{cases} I_1(p) = Y_{11}(p) \cdot V_1(p) + Y_{12}(p) \cdot V_2(p) \\ I_2(p) = Y_{21}(p) \cdot V_1(p) + Y_{22}(p) \cdot V_2(p) \end{cases} \tag{15}$$

o in forma matriciale

$$[I(p)] = [Y(p)] \cdot [V(p)] \tag{16}$$

Il termine $Y_{11}(p)$ prende il nome di ammettenza di ingresso di corto circuito, essendo l'ammettenza che si vede alla porta 1 se la porta 2 è chiusa in corto circuito (quindi Y_{11} non è l'inversa di Z_{11}). Analogamente $Y_{22}(p)$ si chiama ammettenza di uscita di corto circuito. I termini $Y_{12}(p)$ e $Y_{21}(p)$ sono chiamati ammettenze mutue o di trasferimento. La definizione operativa dei parametri y è per i termini mutui

$$Y_{12}(p) = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{V_1=0}$$

, e

$$Y_{21}(p) = \left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{V_2=0}$$

Nel caso in cui un doppio bipolo ammetta sia la descrizione in termini di matrice $[Z]$ sia in termini di matrice $[Y]$ allora si ottiene subito considerando la (10) e la (16) che $[Z] = [Y]^{-1}$ e viceversa.

2.1 Esempi: rete a T, a Π ed a Γ

Nella figura 3 è rappresentato un doppio bipolo notevole, denominato a T in virtù della connessione dei suoi elementi. Per un tale bipolo la matrice $[Z]$ si ottiene in maniera immediata ed ha la seguente espressione

$$[Z(p)] = \begin{bmatrix} Z_a(p) + Z_b(p) & Z_b(p) \\ Z_b(p) & Z_c(p) + Z_b(p) \end{bmatrix} \tag{17}$$

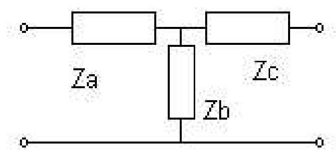

Figura 3: Rete a T

Un altro doppio bipolo notevole è il cosiddetto doppio bipolo a Π,4, per cui si può immediatamente calcolare la matrice delle ammettenze di corto circuito $[Y(p)]$ che ha la seguente espressione

$$[Y(p)] = \begin{bmatrix} Y_a(p) + Y_b(p) & -Y_b(p) \\ -Y_b(p) & Y_c(p) + Y_b(p) \end{bmatrix} \tag{18}$$

Per finire in figura 5 è mostrato il doppio bipolo a Γ, la cui matrice di impedenze di circuito aperto ha la seguente espressione

$$[Z(p)] = \begin{bmatrix} Z_a(p) + Z_b(p) & Z_b(p) \\ Z_b(p) & Z_b(p) \end{bmatrix} \tag{19}$$

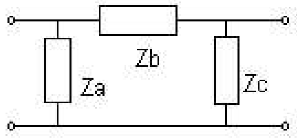

Figura 4: Rete a Π

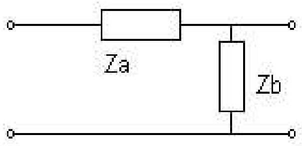

Figura 5: Rete a Γ

3 Matrici ibride $[H]$ e $[G]$

Le matrici ibride mettono in relazione un vettore le cui componenti sono una tensione ad una porta e una corrente all'altra porta, con il vettore le cui componenti sono le rimanti variabili di porta e vengono indicate con i simboli $[H]$ e $[G]$:

$$\begin{cases} V_1(p) = h_{11}(p) \cdot I_1(p) + h_{12}(p) \cdot V_2(p) \\ I_2(p) = h_{21}(p) \cdot I_1(p) + h_{22}(p) \cdot V_2(p) \end{cases} \tag{20}$$

e

$$\begin{cases} I_1(p) = g_{11}(p) \cdot V_1(p) + g_{12}(p) \cdot I_2(p) \\ V_2(p) = g_{21}(p) \cdot V_1(p) + g_{22}(p) \cdot I_2(p) \end{cases} \tag{21}$$

In modo analogo a quanto fatto in precedenza si può dare una definizione ai singoli parametri:

- h_{11} esprime l'impedenza che si vede alla porta 1 quando la porta 2 è corto-circuitata (l'inverso di Y_{11}).
- h_{12} è il rapporto tra la tensione alla porta 1 e la tensione alla porta 2 quando la porta 1 è aperta (cioè è il guadagno di tensione tra la porta 2 e la porta 1 aperta).
- h_{21} è il rapporto tra la corrente nella porta 2 cortocircuitata e la corrente nella porta 1 (cioè il guadagno di corrente tra la porta 1 e la porta 2 in corto circuito).
- h_{22} è l'ammettenza vista alla porta 2 quando la porta 1 è aperta (l'inverso di Z_{22}).

- g_{11} è l'ammettenza vista alla porta 1 quando la porta 2 è aperta (l'inverso di Z_{11}).
- g_{12} è il rapporto tra la corrente nella porta 1 cortocircuitata e la corrente nella porta 2. (cioè è il guadagno di corrente tra la porta 2 e la porta 1 in corto circuito).
- g_{21} è il rapporto tra la tensione alla porta 2 e la tensione alla porta 1 quando la porta 2 è aperta. (cioè è il guadagno di tensione tra la porta 1 e la porta 2 aperta).
- g_{22} esprime l'impedenza che si vede alla porta 2 quando la porta 1 è corto-circuitata (l'inverso di Y_{22})

Si noti che i parametri h e g contrariamente a quelli z e y non sono tra di loro dimensionalmente omogenei, ad esempio h_{11} e g_{22} hanno le dimensioni di un'impedenza, tutti i termini non diagonali sono adimensionali, essendo rapporti di tensioni o correnti, mentre h_{22} e g_{11} hanno le dimensioni di un'ammettenza. Qualora le due rappresentazioni esistono entrambe, allora sono l'una l'inversa dell'altra.

4 Matrici di trasmissione

Un'altra rappresentazione descrittiva dei doppi bipoli di particolare interesse è quella detta di trasmissione. La matrice di trasmissione $[T]$ esprime per un doppio bipolo lineare tempo invariante le grandezze di ingresso in funzione di quelle d'uscita, cioè:

$$\begin{cases} V_1(p) = A(p) \cdot V_2(p) - B(p) \cdot I_2(p) \\ I_1(p) = C(p) \cdot V_2(p) - D(p) \cdot I_2(p) \end{cases} \tag{22}$$

Dove i segni meno presenti a secondo membro sono dovuti alla consuetudine di scegliere il verso della corrente nella seconda porta uscente. Questa convenzione ha una precisa giustificazione. Se si considerano infatti una serie di doppi bipolo connessi in cascata, di cui è nota per ciascuno la descrizione mediante matrice di trasmissione, allora si può considerare la cascata come un unico doppio bipolo avente come matrice di trasmissione il prodotto delle matrici di trasmissione di ciascun doppio bipolo. Infatti adottando questa diversa convenzione le grandezze d'uscita di ciascun doppio bipolo coincidono con quelle di ingresso del doppio bipolo successivo in valore e segno e quindi la matrice di trasmissione globale è semplicemente il prodotto delle matrici di trasmissione dei doppi bipoli componenti. Per individuare il significato dei termini $A(p)$, $B(p)$, $C(p)$ e $D(p)$ si fa ricorso alle seguenti definizioni operative, anche se queste dal punto di vista circuitale presentano qualche complicazione:

- A è il rapporto tra la tensione alla porta 1 e la tensione alla porta 2 quando nella porta 2 non circola corrente. Questo significa che la porta 2 è lasciata aperta, cioè non è possibile imporre un generatore di tensione V_2. Si può invece imporre V_1 e determinare V_2 con la porta 2 aperta. Allora A non è una funzione di trasferimento, ma l'inversa.

- B è pari al rapporto cambiato di segno tra la tensione alla porta 1 e la corrente alla porta 2 con la porta due corto-circuitata. Anche B è quindi l'inversa di una funzione di trasferimento, dato che è possibile calcolarla collegando un generatore di tensione alla porta 1 e determinando la corrente alla porta 2 cortocircuitata.

- Analoghi discorsi si possono ripetere in termini delle altre due grandezze le cui definizioni operative sono

$$C = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{I_2=0}$$

,

$$D = \left.\frac{-I_1}{I_2}\right|_{V_2=0}$$

La matrice di trasmissione inversa è definita in maniera del tutto analoga semplicemente scambiando le due porte tra di loro.

5 Doppi Bipoli notevoli

5.1 Trasformatore ideale

Il trasformatore ideale, fig. 6, è un particolare doppio bipolo caratterizzato dalle seguenti relazioni tra le tensioni di porta e le correnti di porta

$$\begin{cases} v_1(t) = a \cdot v_2(t) \\ i_1(t) = -\frac{1}{a} \cdot i_2(t) \end{cases} \tag{23}$$

a viene detto rapporto di trasformazione. Notiamo che il trasformatore ideale non ammette le rappresentazioni $[Z]$ e $[Y]$, mentre ammette le altre rappresentazioni, in particolare riportiamo di seguito la rappresentazione $[T]$ e $[H]$

$$[T] = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a} \end{bmatrix} \tag{24}$$

$$[H] = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} \tag{25}$$

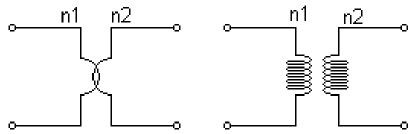

Figura 6: Trasformatore ideale

Una proprietà notevole del trasformatore ideale è che questo doppio bipolo non dissipa energia, in quanto $v_1 \cdot i_1 + v_2 \cdot i_2 = 0$ come è immediato verificare a partire dalle relazioni alle porte. Un'altra proprietà importante è l'adattamento di impedenza che il trasformatore realizza quando alla porta due è collegata un'impedenza di valore fissato $Z(p)$. In questo caso alla porta 1 si vedrà l'impedenza di valore $a^2 \cdot Z(p)$.

6 Reciprocità e simmetria nelle reti a due porte.

Si considerano di seguito le proprietà di reciprocità e di simmetria particolarizzate al caso di un doppio bipolo lineare tempo invariante. Per quanto riguarda la proprietà di reciprocità si ricordi che:

Un doppio bipolo è reciproco se, considerate due situazioni elettriche diverse qualsiasi, (a) e (b), le grandezze elettriche alle due porte soddisfano la seguente espressione:

$$V_1^{(a)} \cdot I_1^{(b)} + V_2^{(a)} \cdot I_2^{(b)} = V_1^{(b)} \cdot I_1^{(a)} + V_2^{(b)} \cdot I_2^{(a)} \tag{26}$$

Per la simmetria si consideri la caratterizzazione esterna di tale proprietà:

Un doppio bipolo si dice simmetrico quando il comportamento della rete nella quale è inserito non muta se si inverte il collegamento delle porte, cioè si collega la porta 1 dov'era collegata la porta 2 e viceversa.

Si può facilmente vedere che questa proprietà equivale alla condizione:

$$\begin{cases} V_1^{(a)} \cdot I_1^{(b)} + V_2^{(a)} \cdot I_2^{(b)} = V_1^{(b)} \cdot I_1^{(a)} + V_2^{(b)} \cdot I_2^{(a)} \\ V_2^{(a)} \cdot I_1^{(b)} + V_1^{(a)} \cdot I_2^{(b)} = V_2^{(b)} \cdot I_1^{(a)} + V_1^{(b)} \cdot I_2^{(a)} \end{cases} \tag{27}$$

A questo punto risulta importante notare che la simmetria comporta sempre la reciprocità di un doppio bipolo. Si caratterizzano ora le varie matrici descrittive in termini di reciprocità e di simmetria:

- Matrice $[Z]$
  Per individuare la condizione di reciprocità si considerano le seguenti due situazioni (a) I_1 assegnato, $I_2 = 0$
  (b) I_2 assegnato, $I_1 = 0$ (questa scelta non è affatto arbitraria come si può facilmente vedere se si scelgono tutte e due le correnti generiche)
  Ne segue che la relazione di reciprocità diviene

  $$V_2^{(a)} \cdot I_2^{(b)} = V_1^{(b)} \cdot I_1^{(a)} \tag{28}$$

  Da cui:

  $$Z_{21}(p) \cdot I_1^{(a)} \cdot I_2^{(b)} = Z_{12}(p) \cdot I_1^{(a)} \cdot I_2^{(b)} \tag{29}$$

  E quindi il doppio bipolo è reciproco se:

  $$Z_{21}(p) = Z_{12}(p) \tag{30}$$

  Per la simmetria poiché lo scambio delle due porte non deve alterare il funzionamento della rete esterna a cui il doppio bipolo è collegato deve essere necessariamente:

  $$\begin{cases} Z_{12}(p) = Z_{21}(p) \\ Z_{11}(p) = Z_{22}(p) \end{cases} \tag{31}$$

- matrice $[Y]$
  Ripetendo analoghe operazioni (duali nella scelta delle tensioni) si trova

  $$Y_{12}(p) = Y_{21}(p) \tag{32}$$

  per la reciprocità e

  $$\begin{cases} Y_{12}(p) = Y_{21}(p) \\ Y_{11}(p) = Y_{22}(p) \end{cases} \tag{33}$$

  per la simmetria

- Matrice $[H]$
  Questa volta si individuano le seguenti due situazioni
  (a) I_1 assegnato, $V_2 = 0$
  (b) V_2 assegnato, $I_1 = 0$ che comportano che la reciprocità imponga

  $$0 = V_1^{(b)} \cdot I_1^{(a)} + V_2^{(b)} \cdot I_2^{(a)} \tag{34}$$

utilizzando i parametri h otteniamo

$$0 = h_{12}(p) \cdot V_2^{(b)} \cdot I_1^{(a)} + h_{21}(p) \cdot V_2^{(b)} \cdot I_1^{(a)} \tag{35}$$

perciò la reciprocità comporta che la matrice $[H]$ sia tale che

$$h_{21} = -h_{12} \tag{36}$$

Per la simmetria si ha che oltre la (36) deve valere anche la (considerando ancora la situazione in cui $V_2^{(a)}$ e $I_1^{(b)}$ sono nulli nella (27))

$$h_{11} \cdot h_{22} - h_{12} \cdot h_{21} = 1 \tag{37}$$

- matrice [G]
  Ripetendo analoghe operazioni (duali nella scelta delle situazioni elettriche alle porte) si trova
  $$g_{21} = -g_{12} \tag{38}$$
  per la reciprocità e
  $$\begin{cases} g_{21} = -g_{12} \\ g_{11} \cdot g_{22} - g_{12} \cdot g_{21} = 1 \end{cases} \tag{39}$$
  per la simmetria.

- matrice [T]
  In questo caso le situazioni elettriche non si possono esprimere mediante semplici relazioni ma tengono conto dell'introduzione di componenti speciali chiamati nullatori e noratori. Esprimiamo la situazione per via analitica

  (a) $I_2 = 0$, ma $V_2 \neq 0$;
  (b) $V_2 = 0$, ma $I_2 \neq 0$
  Queste comportano che la reciprocità imponga
  $$V_1^{(a)} \cdot I_1^{(b)} + V_2^{(a)} \cdot I_2^{(b)} = V_1^{(b)} \cdot I_1^{(a)} \tag{40}$$

  Sostituendo la matrice di trasmissione, dopo semplici calcoli si trova $A \cdot D - C \cdot D = 1$. Per la simmetria si trova invece
  $$\begin{cases} A \cdot D - C \cdot B = 1 \\ A = D \end{cases} \tag{41}$$