

Corso di Circuiti

Materiale didattico: i grafi e la soluzione di circuiti elettrici complessi mediante metodi sistematici*

A. Laudani

October 25, 2016

1 Grafi

I grafi costituiscono uno strumento matematico che permette di descrivere e schematizzare una grande varietà di problemi e situazioni¹. In particolare nell'ambito delle reti elettriche la teoria dei grafi permette di esprimere in modo sistematico le LKT e le LKC con i metodi della topologia combinatoria. Come prima cosa si consideri il concetto intuitivo di grafo:

Un grafo è un insieme di nodi (rappresentabili con elementi zero dimensionali) ed un insieme di lati (rappresentabili con elementi mono dimensionali) vincolati dalla condizione seguente: ogni lato termina ad ogni estremità con un nodo (ma ogni nodo non presuppone necessariamente un lato che vi termini)

Si consideri adesso la definizione formale di grafo:

Sia dato un insieme V finito e non vuoto, un insieme S finito e disgiunto da V e una funzione f che associa ad ogni elemento di S una coppia di elementi di V , non necessariamente distinti. Si chiama grafo G ogni terna ordinata (V, S, f) . Gli elementi di V si chiamano vertici o nodi del grafo G e vengono indicati con

*A.A. 2016/2017, C.d.L. in Ingegneria Elettronica, 72 ore, 9 crediti, docente del corso l'Ing. A Laudani, e-mail: alaudani@uniroma3.it (si prega di comunicare eventuali errori alla precedente e-mail in modo da permetterne la correzione)

¹Il primo testo che tratta i grafi come entità matematiche è la pubblicazione di Eulero sui "Sette ponti di Königsberg".

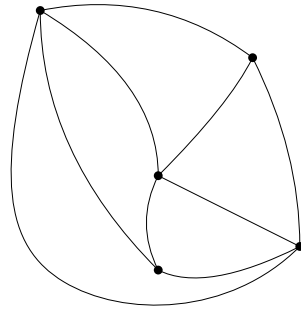


Figure 1: Esempio di grafo

lettere maiuscole; quelli di S si chiamano archi o rami o lati e sono indicati con lettere minuscole. La funzione f viene detta funzione di incidenza.

Si possono subito fare alcune osservazioni a partire da quanto detto:

- la funzione di incidenza stabilisce come i nodi e i lati sono relazionati, ossia stabilisce le effettive interconnessioni del grafo;
- un nodo che non ha lati collegati è un grafo; tale grafo è solitamente detto degenere;
- un grafo può essere costituito da un nodo, più un lato chiuso su se stesso formante la cosiddetta maglia propria;

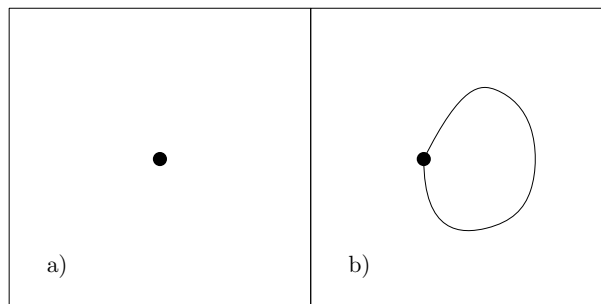


Figure 2: a) Esempio di grafo costituito da un solo nodo (grafo degenere); b) esempio di grafo costituito da un nodo ed un solo lato (maglia propria)

I grafi permettono di esprimere le proprietà topologiche invariante per deformazioni continue: non hanno infatti alcun significato la posizione dei

nodi né la lunghezza, la posizione e la forma degli archi (o lati o rami); interessano le proprietà di incidenza e appartenenza.

Adesso alcune utili definizioni e proprietà generali, che non necessitano di particolari osservazioni:

- Un ramo di un grafo si dice orientato se gli è attribuito un verso tale che, dei due nodi alle sue estremità, uno è considerato punto d'origine, l'altro punto di destinazione.
- Un grafo si dice *orientato* se tutti i suoi lati hanno un orientamento.
- L'*ordine* di un nodo del grafo è pari al numero dei lati che incidono nel nodo.
- Un cammino tra i nodi i e j è una sequenza di rami e nodi che porta dal nodo i al nodo j ; se i nodi i e j coincidono, il cammino prende il nome di ciclo o cammino chiuso.
- Un grafo si dice connesso se dati due nodi del grafo esiste almeno un cammino che li congiunge.
- Dato un grafo G si dice che G_1 è un *sottografo* di G se G_1 è un grafo e se ogni lato ed ogni nodo di G_1 appartengono a G .
- Dato un grafo non connesso i suoi sottografi massimamente connessi sono detti *parti separate*.

Osservazione: per definizione un grafo composto di un solo nodo è un grafo connesso. *Osservazione:* Un grafo connesso consta di un'unica parte separata.

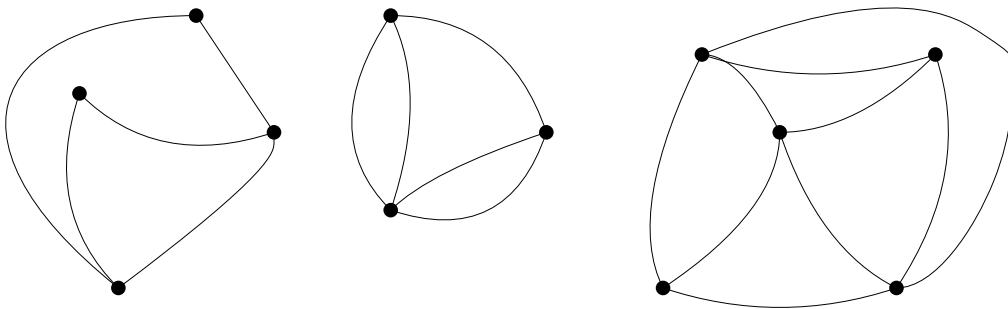


Figure 3: a) Esempio di grafo costituito da tre parti separate

Nel caso di grafi orientati è molto utile fare riferimento alla descrizione dei grafi stessi mediante la cosiddetta matrice di incidenza $[A]$. Essa infatti racchiude tutte le informazioni della funzione di incidenza e dalla sua conoscenza è possibile risalire alla rappresentazione grafica del grafo di partenza. La sua definizione è semplice: $[A] \in \{-1, 0, 1\}^{N,L}$, dove N è pari al numero di nodi e L è pari al numero di lati, ed in particolare l'elemento generico

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se il lato } j \text{ ha come punto di destinazione il nodo } i \\ -1 & \text{se il lato } j \text{ ha come punto di origine il nodo } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (1)$$

Si considerino ora alcune importanti definizioni che vengono molto usate nello studio delle reti elettriche.

*Definizione di **insieme di taglio**:* Considerato un grafo G costituito da N parti separate. Un insieme di taglio di G è un insieme di lati di G che soddisfa le due seguenti proprietà:

1. la rimozione di tutti i lati dell'insieme di taglio fa sì che il restante grafo abbia $N + 1$ parti separate;
2. la rimozione di tutti i lati dell'insieme di taglio eccetto uno arbitrario lascia il grafo in N parti separate.

Nelle figure 4 e 5 sono rappresentati diversi casi di insiemi di taglio.

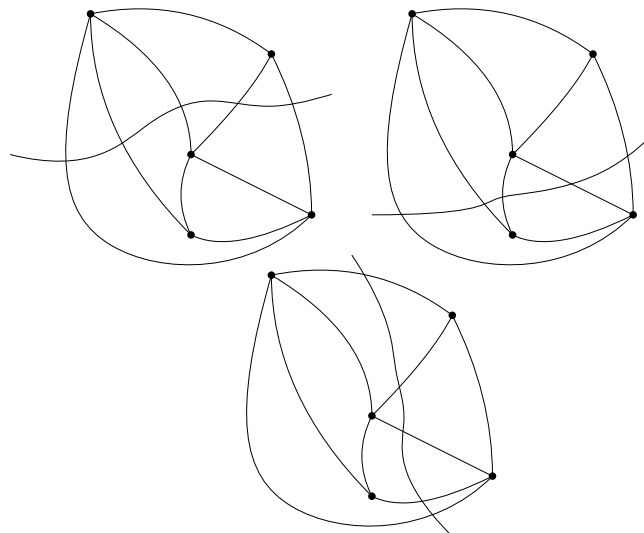


Figure 4: Tre diversi esempi di insiemi di taglio per uno stesso grafo

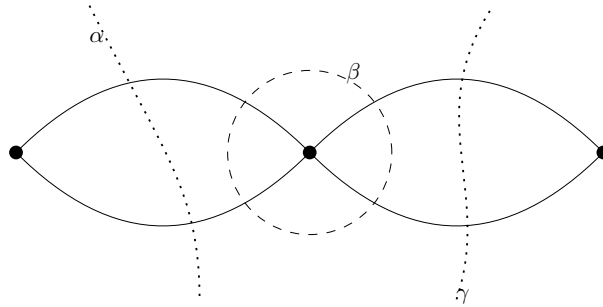


Figure 5: α e γ sono insiemi di taglio, β no.

*Definizione di **maglia**:* una maglia è un sottografo connesso i cui nodi sono tutti di ordine 2. *Osservazione:* analogo è dire che una maglia è un cammino chiuso di un grafo, in cui nessun nodo è nodo di origine (o di destinazione) di un lato più di una volta.

*Definizione di **albero**:* Dato un grafo connesso G , si dice albero di G un sottografo connesso G^* di G che comprende tutti i nodi di G e nessuna maglia. I lati di G appartenenti all'albero G^* si chiamano lati d'albero; i lati di G non appartenenti all'albero G^* si chiamano lati di coalbero.

Per un dato grafo G esistono numerosi alberi. Il numero di lati d'albero di un grafo avente N nodi è $(N-1)$. Il numero di lati di coalbero è $L-(N-1)$ essendo L il numero totale di lati. Infine un albero che comprende tutti gli $N-1$ lati connessi ad un unico nodo con orientamento emergente da tale nodo si dice *albero a stella*. L'aggiunta di un ramo del coalbero all'albero crea una maglia (questa è una conseguenza della definizione di albero). Le maglie che si formano in questa maniera sono pari al numero di lati di coalbero $(L-N+1)$ e prendono il nome di maglie fondamentali associate all'albero.

Osservazione: una maglia fondamentale contiene uno e un solo lato di coalbero ed ogni lato di coalbero compare in una ed una sola maglia fondamentale.

Togliendo un lato dell'albero di un grafo connesso, l'albero risulta suddiviso in due parti separate. Quindi a partire da un albero di un grafo è possibile individuare un insieme di taglio costituito da quel lato dell'albero e da altri lati appartenenti solo al coalbero: questo insieme di taglio viene detto fondamentale. Il numero di tali insiemi di taglio fondamentali è pari al numero di lati d'albero, cioè $(N-1)$.

Osservazione: un insieme di taglio fondamentale contiene uno ed uno solo lato d'albero ed ogni lato d'albero compare in uno ed uno solo insieme di taglio fondamentale.

2 Grafo di circuiti ed elementi circuitali

Dato un componente con n morsetti, si dice grafo del componente un qualsiasi albero, ad esempio a stella, che abbia come nodi gli n morsetti del componente. Esempi di grafi per tali componenti sono mostrati in figura 6; nella figura 7 è invece mostrato il grafo di un doppio bipolo.

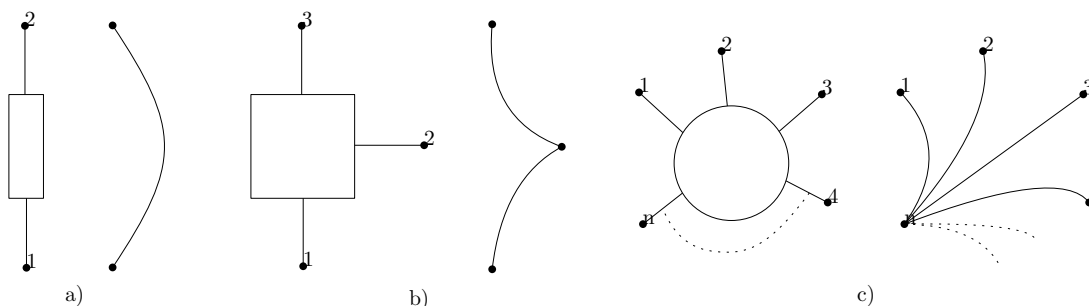


Figure 6: Esempi di grafi di componenti circuitali

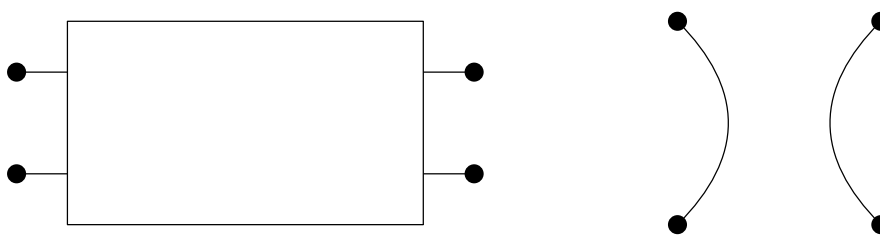


Figure 7: Esempio di grafo di un doppio bipolo

A partire dalla precedente definizione è possibile costruire per una rete elettrica arbitraria un grafo che la rappresenti. Al grafo di un elemento circuitali o di un circuito possono essere associate un insieme di tensioni ed un insieme di correnti. L'insieme delle correnti è costituito da tutte le correnti di lato del grafo. L'insieme delle tensioni è costituito da tutte le tensioni di lato del grafo (tensione tra i nodi estremi di ogni lato del grafo). Assegnando ai lati del grafo il verso delle correnti di lato (o delle tensioni

di lato) e ricordando come le tensioni e le correnti sono legate tra loro dalle leggi di lato. Nel caso della scelta dell'albero come grafo rappresentativo di un elemento circuitale si può dimostrare che le tensioni e le correnti del grafo (cioè dell'albero) sono variabili descrittive per il componente in esame. Esse infatti godono dei requisiti di indipendenza e completezza.

3 Leggi di Kirchhoff e grafi

Mediante il grafo di una rete elettrica si possono definire le LKC e le LKT attraverso i concetti di insieme di taglio e di maglia. Infatti ad ogni insieme di taglio si può associare arbitrariamente una direzione di riferimento. Inoltre si può verificare che a qualsiasi superficie gaussiana corrisponde un insieme di taglio o l'unione di più insiemi di taglio. Si può quindi definire la LKC all'insieme di taglio come segue:

LKC agli insiemi di taglio: *In un grafo di una rete elettrica a parametri concentrati, in qualsiasi istante t , la somma algebrica delle correnti relative ad un insieme di taglio è nulla.*

Analogamente alla LKT definita lungo un percorso chiuso corrisponde la seguente LKT alle maglie:

LKT alle maglie: *In un grafo di una rete elettrica a parametri concentrati, in qualsiasi istante t , la somma algebrica delle tensioni lungo una maglia è nulla.*

Nel caso di grafi connessi per le tensioni è possibile però fare anche una scelta alternativa; si può cioè associare una funzione potenziale ad ogni nodo del grafo e definire le tensioni di lato come differenza tra le funzioni potenziali di nodo. In questa maniera tra l'altro si individua immediatamente una proprietà della base delle tensioni. Essendo il numero di nodi N le funzioni potenziale sono anch'esse N , ma avendo significato le differenze di potenziale e non le funzioni potenziale stesse, tutte le tensioni di lato saranno espresse in funzione delle $N - 1$ funzioni potenziale, quindi la base delle tensioni avrà dimensione $N - 1$. Si usa spesso dire che si è scelto una tensione di riferimento, assumendo per questo nota funzione potenziale (di seguito solo potenziale) pari a zero.

3.1 Proprietà degli insiemi di taglio e delle maglie fondamentali

Si consideri adesso un circuito elettrico che abbia un corrispondente grafo connesso e si scelga un albero arbitrario². A partire dall'albero si è in precedenza definito il concetto di insieme di taglio fondamentale e in particolare si è detto come il numero degli insiemi di taglio fondamentali sia pari al numero dei lati di albero, visto che mediante questi i tagli fondamentali risultano definiti. Poichè ciascun lato di albero è presente esclusivamente in un insieme di taglio la corrente di quel lato d'albero è presente esclusivamente nella LKC relativa a quel taglio. Di conseguenza le $N-1$ LKC definite mediante gli insiemi di taglio fondamentali sono linearmente indipendenti. In maniera analoga si è visto che il numero di maglie fondamentali è pari al numero di lati di coalbero. Poichè ciascun lato di coalbero compare in una ed una sola maglia fondamentale la tensione di quel lato è presente esclusivamente nella LKT relativa a quella maglia. Di conseguenza le $L-N+1$ LKT definite mediante le maglie fondamentali (ossia mediante i lati di coalbero) sono linearmente indipendenti. Viene di conseguenza così individuato un metodo per scrivere a partire dalla scelta di un albero su un grafo tutte le LKT e le LKC linearmente indipendenti. Di seguito vengono mostrate altre proprietà fondamentali delle tensioni di lato d'albero e delle correnti di coalbero.

3.1.1 Le tensioni dei lati d'albero costituiscono una base dello spazio delle tensioni

Basta verificare che siano valide le proprietà di indipendenza e completezza.

1. Non esistono relazioni che legano tali quantità, poiché per definizione un albero non contiene maglie, quindi nessuna tensione d'albero è deducibile dalle sole altre tensioni d'albero mediante LKT.
2. Le tensioni dei lati di coalbero sono tutte deducibili dalle tensioni d'albero. Infatti in corrispondenza di ciascun lato di coalbero esiste una maglia fondamentale che permette di esprimere tale tensione in funzione delle tensioni d'albero mediante una LKT.

²A partite da una rete elettrica non connessa (cioè il cui grafo consta di più parti separate) è possibile ottenere una rete elettrica connessa, tramite l'aggiunta di lati che saldino le varie parti tra di loro, purchè in questa operazione non si vengano a formare nuove maglie. In questo caso il grafo che si viene a creare prende il nome di grafo incernierato.

3.1.2 Le correnti dei lati di coalbero costituiscono una base dello spazio delle correnti

1. Non esistono relazioni che legano tali quantità poiché non esiste un insieme di taglio formato da soli lati di coalbero.
2. Le correnti dei lati d'albero sono esprimibili in funzione delle correnti di coalbero mediante le LKC applicate ai tagli fondamentali.

Queste proprietà permettono di risolvere il problema dell'individuazione del sottoinsieme di tensioni indipendenti e del sottoinsieme di correnti indipendenti per una data rete. Per finire *La maglia fondamentale relativa ad un lato del coalbero comprende tutti e soli i lati dell'albero i cui insiemi di taglio fondamentali comprendono quel lato. L'insieme di taglio fondamentale relativo ad un lato dell'albero comprende tutti e soli i lati del coalbero le cui maglie fondamentali comprendono quel lato.*

3.2 Costruzione delle matrici per le LKC ai tagli e le LKT alle maglie fondamentali

Vediamo in questo paragrafo come è possibile esprimere in maniera matriciale i concetti precedentemente enunciati riguardo la scrittura delle LKC ai tagli fondamentali e delle LKT alle maglie fondamentali. Per fare questo consideriamo il circuito di fig. ?? e costruiamone il relativo grafo. Notiamo che consta di 5 nodi e 11 lati ed è rappresentabile graficamente come in figura ???. In figura 9 sono mostrati quattro diversi alberi ottenibili a partire da questo grafo. Si noti che gli alberi (a) e (c) sono a stella in quanto tutti i rami si dipartono da un unico nodo. Di seguito useremo prima l'albero (b) e poi l'albero (a) per la scrittura delle LK.

Per prima cosa numeriamo i lati della grafo a partire da quelli di albero, per poi proseguire con quelli di co-albero come indicato in fig. 10 e scegliamo per ciascuno di essi un orientamento, supponendo che questo corrisponda al verso delle tensioni di lato. Chiaramente se ammettiamo che per tutti i lati valga una stessa convenzione (del generatore o dell'utilizzatore) risulterà che pure il verso della corrente è legato all'orientazione data ai lati del grafo. Per questo esempio supponiamo di utilizzare la convenzione dell'utilizzatore. È possibile adesso individuare i 4 ($N - 1$ tanti quanti i lati di albero) insiemi di taglio fondamentali (o più brevemente tagli fondamentali) e le 7 ($L - N + 1$, tanti quanti i lati di co-albero) maglie fondamentali a cui scrivere le LKC e le LKT. Gli insiemi di taglio sono mostrati in fig. 11, mentre le maglie fondamentali sono mostrate in fig. 11. Invece che scrivere direttamente le

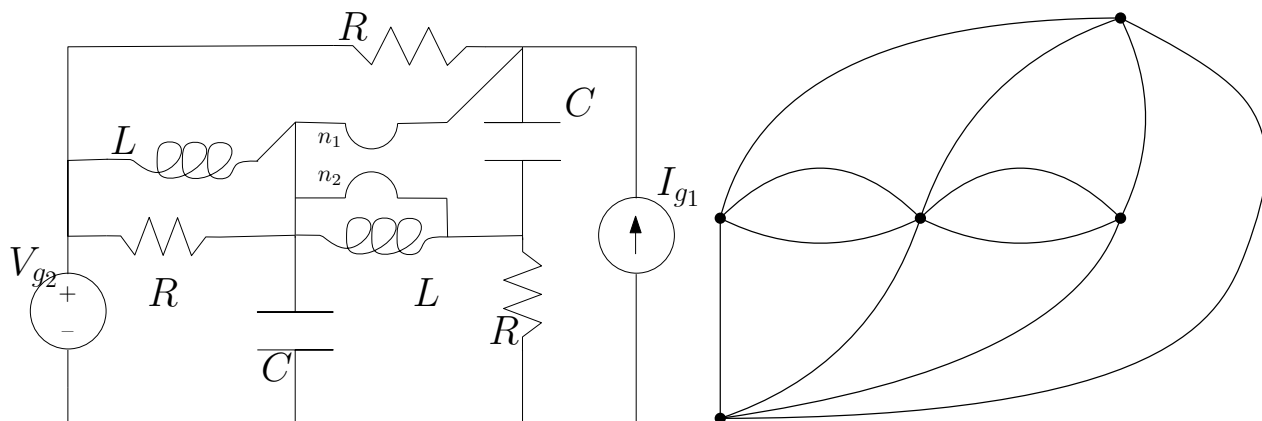


Figure 8: Circuito usato come esempio per la costruzione delle matrici degli insiemi di tagli e delle maglie fondamentali e relativo grafo.

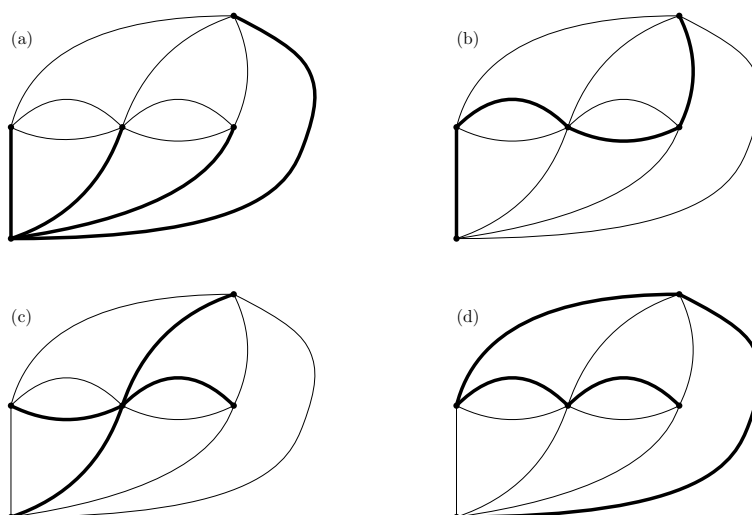


Figure 9: Alcuni degli alberi che possono essere selezionati a partire dal grafo in fig. 8.

LKC e le LKT, proviamo a costruire due matrici (una per i tagli e l'altra per le maglie) seguendo le regole:

- la matrice dei tagli fondamentali $[T]$ avrà $N - 1$ righe e L colonne;
- la matrice delle maglie fondamentali $[M]$ avrà $L - N + 1$ righe e L colonne;

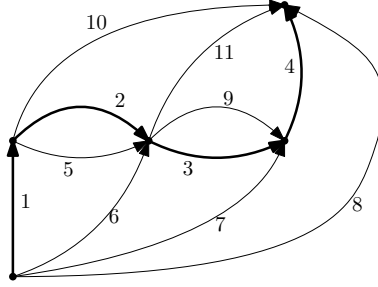


Figure 10: Albero a stella selezionato per la scrittura delle LKC e LKT

- il generico elemento $t_{i,j}$ della matrice $[T]$ sarà 1 se il lato j fa parte dell'insieme di taglio relativo al lato d'albero i ed ha lo stesso verso del lato d'albero i , -1 se il lato j fa parte dell'insieme di taglio relativo al lato d'albero i ed ha verso opposto al lato d'albero i , 0 altrimenti;
- il generico elemento $m_{i,j}$ della matrice $[M]$ sarà 1 se il lato j fa parte della maglia fondamentale relativa al lato di coalbero i ed ha lo stesso verso di questo, -1 se il lato j fa parte della maglia fondamentale al lato di coalbero i ma ha verso opposto, 0 altrimenti;

Risulta chiaro che nella matrice $[T]$ ogni lato d'albero conterà (con coefficiente 1) una sola volta nella riga relativa al proprio insieme di taglio fondamentale, mentre nella matrice $[M]$ ogni lato di co-albero conterà una sola volta nella riga relativa alla propria maglia fondamentale. Questo fa sì che le LKT e le LKC siano linearmente indipendenti. Al primo taglio fondamentale (quello del lato d'albero 1) appartengono oltre chiaramente il lato 1 anche i lati di coalbero 6, 7 e 8, e tutti hanno verso concorde con il lato 1. Al secondo taglio appartengono i lati 2, 5, 6, 7, 8, 10 ed hanno tutti verso concorde. Al terzo taglio appartengono i lati 3, 7, 8, 9, 10 ed 11 ed anche in questo caso i versi sono tutti concordi. All'ultimo taglio appartengono i lati 4, 8, 10 ed 11, tutti orientati allo stesso modo (ciò è successo in maniera del tutto casuale). Ecco di seguito la matrice $[T]$ ottenuta.

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Osserviamo che la matrice $[T]$ si presta ad essere rappresentata come una matrice a blocchi in quanto le prime quattro colonne sono la matrice identità

dello spazio $\Re^{4 \times 4}$, $\mathbf{1}_4$:

$$[T] = [\mathbf{1}_4 | \mathbf{T}_R] \quad (3)$$

dove $[T_R]$ è una matrice 4×7 ottenuta eliminando le prime 4 colonne da $[T]$:

$$[T_R] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Nel caso più generale questo sarà ancora vero, e le prime N_1 colonne di $[T]$ saranno sempre pari a $\mathbf{1}_{N-1}$ (non è pertanto necessario conservare una tale informazione in una eventuale implementazione software del metodo. In maniera analoga lavorando con le maglie piuttosto che con i tagli notiamo che: la prima maglia fondamentale è formata dal lato di co-albero 5 e dal lato d'albero 2, con versi opposti; la seconda maglia (quella del lato di co-albero 6) è formata dai lati dai lati 1, 2 e 6, con i lati 1 e 2 discordi rispetto al verso di percorrenza che è assegnato dal lato di coalbero 6; la terza maglia fondamentale è formata dai lati 1, 2, 3 (tutti e tre discordi) e 7; la quarta maglia dai lati 1, 2, 3, 4 e 8 (i primi 4 tutti discordi rispetto a 8); la maglia 5 è formata dai lati 3 e 9 (con versi opposti); la maglia 6 dai lati 2, 3, 4 e 10 (i primi 3 discordi rispetto al lato di co-albero 10); l'ultima maglia fondamentale è formata dai lati 3 e 4 e dal lato 11 (i versi dei lati 3 e 4 sono opposti a quello del lato 11). Possiamo quindi scrivere la matrice $[M]$ così ottenuta:

$$[M] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Anche per questa matrice possiamo fare un'osservazione analoga a quella fatta per la matrice dei tagli fondamentali $[T]$, ovvero sottolinearne la sua natura a blocchi e la presenza della matrice identità $\mathbf{1}_7$ (in generale avremo una matrice $\mathbf{1}_{L-N+1}$):

$$[M] = [M_R | \mathbf{1}_7] \quad (6)$$

con la matrice delle maglie ridotta ottenuta eliminando le ultime 7 colonne

da $[M]$.

$$[M_R] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Si noti adesso che $[M_R] = -[T_R]^t$. Ciò è diretta conseguenza di un'affermazione già fatta in precedenza 3.1.2, che qui ripetiamo in modo leggermente diverso: tutte le maglie fondamentali formate a partire dai lati di co-albero presenti nell'insieme di taglio fondamentale relativo al lato di albero j contengono il lato j ; tutti gli insiemi di taglio fondamentali formati a partire dai lato d'albero presenti in una maglia fondamentale relativa al lato di co-albero i contengono il lato i .

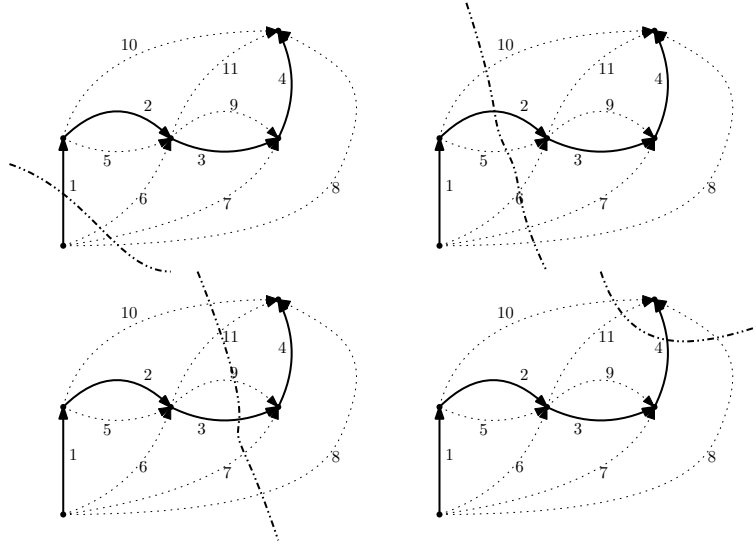


Figure 11: Tagli fondamentali relativi all'albero in fig. 14

Vediamo adesso come le matrici $[T]$ e $[M]$ si prestano alla scrittura delle LKC e delle LKT. consideriamo i vettori delle tensioni e delle correnti:

$$[V] = [v_1(t), v_2(t), \dots, v_L(t)]^t \quad (8)$$

$$[I(t)] = [i_1(t), i_2(t), \dots, i_L(t)]^t \quad (9)$$

È immediato verificare (e lasciamo al lettore l'opportunità di verificarlo da solo) che $[T] \cdot [I] = 0$ risulta pari alle LKC agli insiemi di taglio fondamentale,

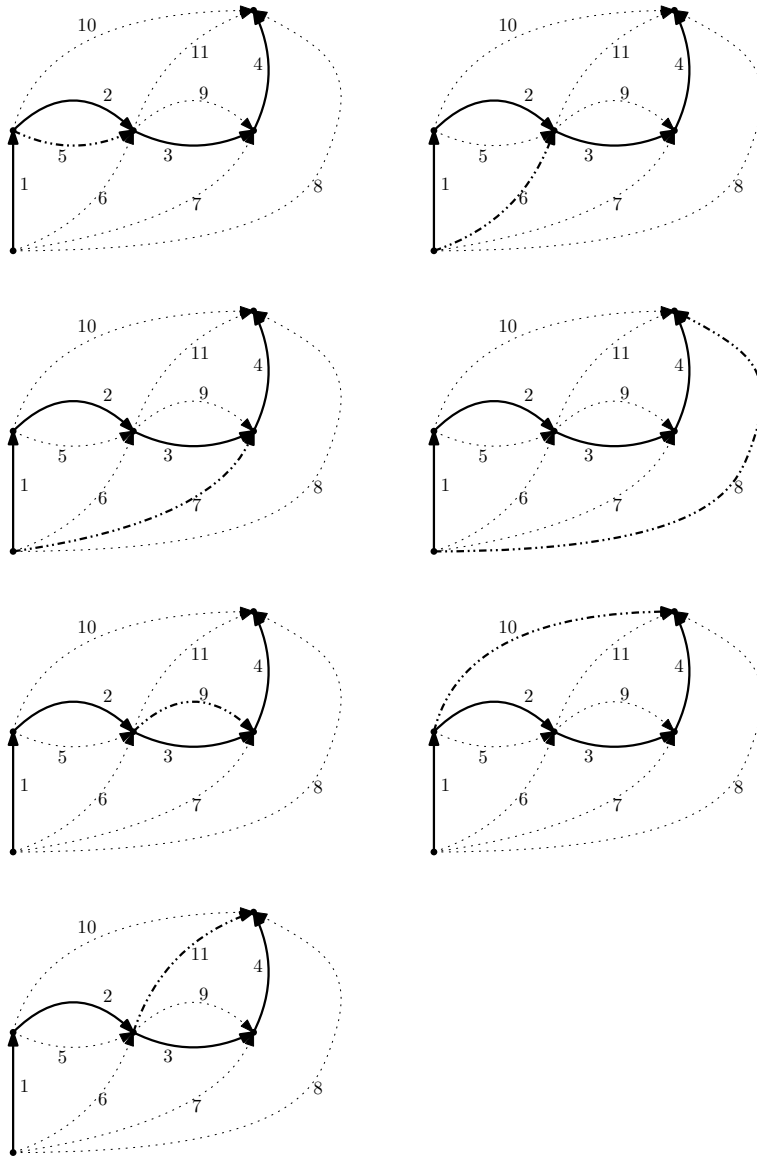


Figure 12: Maglie fondamentali che si ottengono a partire dall'albero in fig. 14

mentre $[M] \cdot [V] = 0$ risulta pari alle LKT alle maglie fondamentali. Non solo ma considerando la numerazione data ai lati abbiamo pure che il vettore delle tensioni $[V] = [V_{\text{lati d'albero}} \mid V_{\text{lati di co-albero}}]^t$ e analogamente $[I] =$

$[I_{\text{lati d'albero}} \mid I_{\text{lati di co-albero}}]^t$ il che porta alle seguenti elaborazioni:

$$[T] \cdot [I] = 0 \quad (10)$$

$$[\mathbf{1}_4 \mid \mathbf{T}_R] \cdot [I_{\text{lati d'albero}} \mid I_{\text{lati di co-albero}}]^t = 0 \quad (11)$$

$$\mathbf{1}_4 \cdot [I_{\text{lati d'albero}}] + [\mathbf{T}_R] \cdot [I_{\text{lati di co-albero}}] = 0 \quad (12)$$

$$[I_{\text{lati d'albero}}] = -[T_R] \cdot [I_{\text{lati di co-albero}}] \quad (13)$$

per le correnti di lato d'albero e

$$[M] \cdot [V] = 0 \quad (14)$$

$$[M_R \mid \mathbf{1}_7] \cdot [V_{\text{lati d'albero}} \mid V_{\text{lati di co-albero}}]^t = 0 \quad (15)$$

$$[M_R] \cdot [V_{\text{lati d'albero}}] + \mathbf{1}_7 \cdot [V_{\text{lati di co-albero}}] = 0 \quad (16)$$

$$[V_{\text{lati di co-albero}}] = -[M_R] \cdot [V_{\text{lati di albero}}] \quad (17)$$

per le tensioni di lato di co-albero. Ossia tramite la matrice $[MT] = [M_R] = -[T_R]^t$, si possono scrivere sia le tensioni di lato di co-albero in funzione delle tensioni di lato d'albero sia le correnti di lato d'albero in funzione delle correnti di lato di co-albero.

$$[V_{\text{lati di co-albero}}] = -[MT] \cdot [V_{\text{lati di albero}}] \quad (18)$$

$$[I_{\text{lati d'albero}}] = [MT]^t \cdot [I_{\text{lati di co-albero}}] \quad (19)$$

Infine considerando l'intero vettore delle tensioni di lato $[V]$ e l'intero vettore delle correnti di lato $[I]$ è possibile anche scrivere:

$$[V] = \begin{bmatrix} V_{\text{lati d'albero}} \\ V_{\text{lati di co-albero}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{N-1} [V_{\text{lati d'albero}}] \\ -[MT] \cdot [V_{\text{lati di albero}}] \end{bmatrix} = [T]^t \cdot [V_{\text{lati d'albero}}] \quad (20)$$

ed analogamente:

$$[I] = [M]^t \cdot [I_{\text{lati di co-albero}}] \quad (21)$$

3.2.1 Albero a stella

In questo paragrafo ripeteremo quanto fatto in precedenza per il caso di una scelta relativa ad un albero a stella come in fig. 13. Anche in questo caso abbiamo numerato prima i lati di albero e poi i lati di co-albero. Abbiamo inoltre orientato i lati supponendo che la freccia indichi il verso della tensione e che per la corrente di lato si stia utilizzando la convenzione dell'utilizzatore. Gli insiemi di taglio fondamentali relativi a questa scelta sono mostrati in

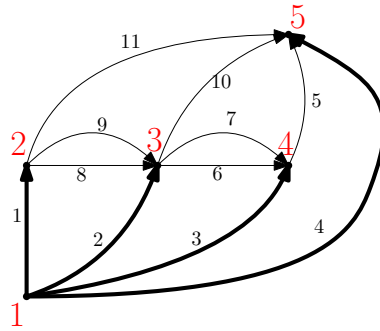


Figure 13: Albero a stella selezionato per la scrittura delle LKC e LKT

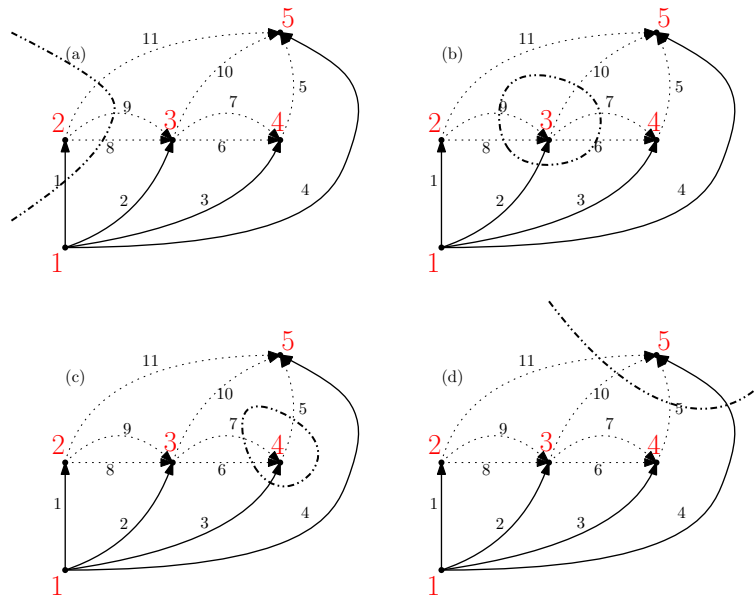


Figure 14: Tagli fondamentali relativi all'albero in fig. 14

figura 14. È immediato scrivere le relative 4 LKC ai tagli fondamentali, che risultano linearmente indipendenti e le 7 LKT alle maglie fondamentali, ossia compilare le matrici $[T]$ e $[M]$ per questo nuovo albero

Ecco qui di seguito le due matrici ottenute: da sistemare

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

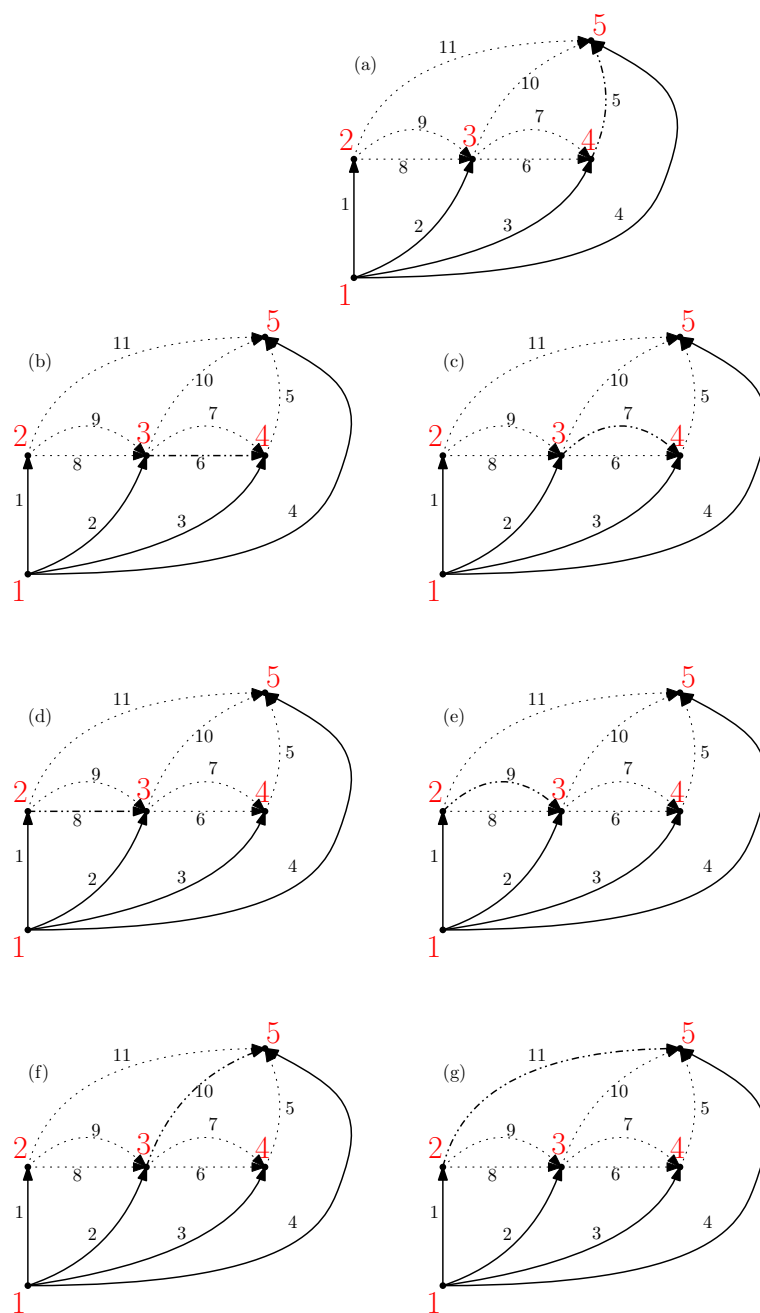


Figure 15: Magli fondamentali che si ottengono a partire dall'albero in fig. 14

$$[M] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Anche in questo caso è possibile fare le stesse considerazioni fatte in precedenza.

4 Costruzione della matrice di incidenza e relative proprietà

Riconsideriamo il circuito di figura 8 ed il suo grafo orientato presentato on figura 16, in cui oltre numerare i nodi ed i lati ed abbiamo scelto arbitrariamente i versi dei lati ed associandoli alle tensioni di lato. Per le correnti di lato assumiamo di usare la convenzione dell'utilizzatore per tutti i componenti, in modo tale che siano sempre dirette in maniera inversa rispetto alle frecce (delle tensioni) riportate sul grafo.

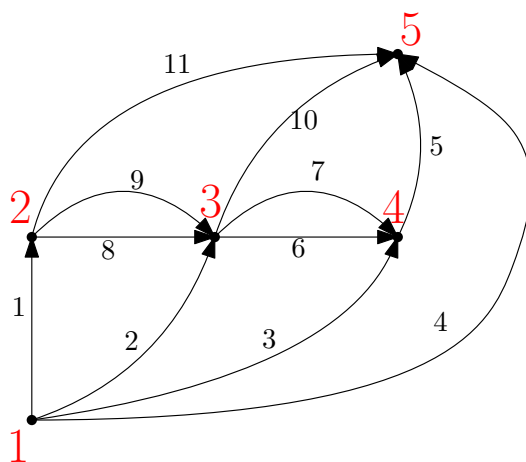


Figure 16: Esempio di grafo del circuito 8 usato per la costruzione della matrice di incidenza

Ricordando le regole per la costruzione della matrice di incidenza $[A]$, ossia $a_{i,j}$ uguale a 0, -1 o 1 a seconda che il lato j non incida oppure incida ed abbia destinazione od origine sul nodo i , troviamo che:

- $a_{1,1} = a_{1,2} = a_{1,3} = a_{1,4} = a_{2,8} = a_{2,9} = a_{2,11} = a_{3,6} = a_{3,7} = a_{3,10} = a_{4,5} = -1$
- $a_{2,1} = a_{3,2} = a_{3,8} = a_{3,9} = a_{4,3} = a_{4,6} = a_{4,7} = a_{5,4} = a_{5,5} = a_{5,10} = a_{5,11} = 1$
- 0 tutti gli altri

Per cui la matrice $[A]$ (in questo caso una 5×10) sarà:

$$[A] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

È possibile fare qualche osservazione su questa matrice che sarà valida per ogni matrice di incidenza:

- il numero di elementi pari ad 1 (o ugualmente pari a -1) sarà pari al numero di lati L
- in ogni colonna apparirà al massimo un 1 ed un -1
- la somma degli elementi di ciascuna colonna fa sempre 0
- ciascuna riga è pari alla somma delle altre quattro, ossia il rango della matrice sarà pari al minimo tra $N - 1$ e L

Consideriamo ora i due vettori delle correnti di lato $[I(t)] = [i_1(t), i_2(t), \dots, i_L(t)]^t$ e delle tensioni di lato $[V] = [v_1(t), v_2(t), \dots, v_L(t)]^t$. È immediato verificare che il prodotto $[A] \cdot [I(t)] = 0$ coincide con le 5 LKC ai nodi (somma delle correnti entranti), infatti:

$$\begin{cases} -i_1(t) - i_2(t) - i_3(t) - i_4(t) = 0 \\ i_1(t) - i_8(t) - i_9(t) - i_{11}(t) = 0 \\ i_2(t) - i_6(t) - i_7(t) + i_8(t) + i_9(t) - i_{10}(t) = 0 \\ i_3(t) - i_5(t) + i_6(t) + i_7(t) = 0 \\ i_4(t) + i_5(t) + i_{10}(t) + i_{11}(t) = 0 \end{cases} \quad (25)$$

Notiamo che come il rango della matrice $[A]$ non può essere mai pari ad N , così le LKC scritte precedentemente non sono linearmente indipendenti. D'altro canto considerando il vettore $[E(t)] = [e_1(t), e_2(t), e_N(t)]^t$ dei potenziali di nodo e ragionando sulla definizione di tensione di lato del generico lato $v_k(t) = e_{\text{destinazione di } v_k} - e_{\text{origine di } v_k}$ è possibile osservare che

$$[V(t)] = [A]^t \cdot [E(t)] \quad (26)$$

infatti

$$[V(t)] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ e_3(t) \\ e_4(t) \\ e_5(t) \end{bmatrix} \quad (27)$$

4.1 Teorema di Tellegen

La matrice di incidenza può essere utilizzata per ricavare un'interessante osservazione riguardo i due sottospazi di \mathfrak{R}^L , ossia lo spazio delle tensioni di lato $\mathbf{V} = \{\mathbf{v} \in \mathfrak{R}^L : \mathbf{v} \text{ soddisfa le LKT}\}$ e lo spazio delle correnti di lato $\mathbf{I} = \{\mathbf{i} \in \mathfrak{R}^L : \mathbf{i} \text{ soddisfa le LKC}\}$. Innanzitutto va ricordato che dato un circuito con N nodi ed L lati possiamo scrivere $N - 1$ LKC e $L - N + 1$ LKT linearmente indipendenti: questo comporta che lo spazio delle correnti di lato ha dimensione $L - (N - 1)$, mentre lo spazio delle tensioni di lato ha dimensione $L - (L - N + 1) = N - 1$, ossia vi sono $L - N + 1$ correnti linearmente indipendenti (tante quanti i lati di coalbero) e $N - 1$ tensioni linearmente indipendenti (tante quanti i lati di albero). Inoltre è facile dimostrare che questi due spazi sono tra di loro “ortogonali” ossia $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$, e $\forall \mathbf{i} \in \mathbf{I}$

$$\mathbf{v}^t \cdot \mathbf{i} = 0 \quad (28)$$

. Infatti, basta ricordare che

$$[V(t)]^t \cdot [I(t)] = ([A]^t \cdot [E(t)])^t \cdot [i(t)] = ([E(t)]^t \cdot [A] \cdot [I(t)]) = 0 \quad (29)$$

È interessante notare che il precedente risultato, che è anche conosciuto come teorema di Tellegen, si presta a diverse interpretazioni/osservazioni. Innanzitutto se consideriamo che il prodotto scalare $\mathbf{v}^t \cdot \mathbf{i}$ altro non è che la sommatoria della potenza assorbita da ciascun ramo del circuito, $\sum_k = 1^k = Lv_k(t)i_k(t)$, (assorbita perchè abbiamo considerato la convenzione dell'utilizzatore nella scelta dei versi delle tensioni e delle correnti), allora se ne ricava che la potenza complessivamente assorbita dalla nostra rete elettrica è nulla (ciò è ovvio anche in seguito alla conservazione dell'energia di un sistema isolato). La cosa più interessante è questo risultato l'abbiamo ottenuto solo a partire

dalle informazioni relative alle leggi di Kirchhoff, ed in particolare usando la teoria dei grafi, ossia senza sfruttare alcuna informazione sulla natura dei lati. Questo fa sì che tale risultato sia valido anche se facciamo riferimento ad un vettore delle tensioni di un circuito e ad un vettore delle tensioni di un altro circuito, purchè i due circuiti abbiano lo stesso grafo. Stesso discorso vale per lo stesso circuito, ma con due vettori di tensione e corrente relativi a diverse tipologie di eccitazioni. Chiaramente in questi casi il prodotto non ha alcun significato di potenza. Lo stesso vale anche in domini trasformati (Laplace, Fourier, Fasoriale, ecc.), visto che le LKC e le LKT sono leggi lineari ed omogenee ed anche in questo caso il significato di potenza si perde proprio, nonchè considerando istanti di tempo diversi per la scrittura delle LKT e LKC. Ulteriori osservazioni potrebbero essere fatte, ma lasciamo al lettore la voglia (se ce n'è) di provare tutte le varianti possibili con i relativi significati.

4.2 Matrice di incidenza ridotta

Per la soluzione dei problemi circuitali si può utilizzare la matrice di incidenza ridotta $[A_R]$, ossia quella ottenuta eliminando una riga a piacere dalla matrice di incidenza $[A]$. Cerchiamo di capire le motivazioni di questa scelta. Innanzitutto è importante notare, come già detto in precedenza, che le LKC scritte utilizzando la matrice di incidenza ed il prodotto $[A] \cdot [i(t)] = 0$ sono linearmente dipendenti, in quanto in un circuito con N nodi solo $N - 1$ LKC linearmente indipendenti possono essere scritte. Del resto eliminando una riga la matrice ottenuta avrà le righe linearmente indipendenti e quindi la matrice di incidenza ridotta $[A_R]$ permetterà proprio di scrivere il numero necessario di LKC. Chiaramente bisogna adesso preoccuparsi delle tensioni. Anche in questo caso è possibile notare che è vero che abbiamo teoricamente N potenziali di nodo, ma è pure vero che le tensioni linearmente indipendenti sono solo $N - 1$, e che hanno senso le differenze tra i potenziali di nodo (ossia le tensioni di lato) e non i potenziali in quanto tali. L'aver eliminato una riga nella matrice di incidenza comporta che il suo uso per la scrittura delle LKT cancella di fatto uno dei potenziali: tale cancellazione si riconduce alla scelta (arbitraria ma possibile) del valore nullo per tale potenziale, il che permette di non alterare il significato delle equazioni scritte. Di conseguenza possiamo affermare che *utilizzare la matrice di incidenza ridotta equivale ad assegnare a zero il potenziale di uno dei nodi (nodo di riferimento o nodo di saldo) ed a scrivere le LKC per tutti gli altri nodi (escludendo proprio il nodo di riferimento stesso)*. Riscrivendo inoltre la matrice ridotta per l'esempio precedente nel caso in cui abbiamo eliminato il nodo 1 (ossia scelto questo

nodo come nodo di riferimento) si trova:

$$[A_R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Si noti che è del tutto uguale alla matrice degli insiemi di taglio ottenuta per l'albero a stella. In effetti è possibile dimostrare che, con opportune manipolazioni, è sempre possibile ricondurre il metodo dei nodi al metodo degli insiemi di taglio fondamentali nel caso si sia scelto per questo metodo un albero a stella.

5 Metodi sistematici

Lo scopo dell'analisi dei circuiti è quello di determinare il comportamento delle variabili di rete attraverso la soluzione del sistema di equazioni integro-algebrico-differenziali³, che descrive il legame tra le variabili di rete e gli ingressi. Chiaramente dovendo analizzare manualmente o al calcolatore la rete elettrica risulta necessario ridurre la complessità delle procedure sfruttando al meglio le caratteristiche del sistema di equazioni che governa il circuito stesso. Data la rete elettrica \mathbf{R} costituita da L lati e N nodi e premesso che la rete è descritta da tutte le funzioni tensione $[v(t)]$ e corrente $[i(t)]$ di lato, il sistema di equazioni che descrive la rete comprende:

1. $N - 1$ LKC linearmente indipendenti
2. $L - (N - 1)$ LKT linearmente indipendenti
3. le L leggi di lato (o relazioni costitutive dei lati)

per un totale di $2L$ equazioni di cui L lineari, algebriche ed omogenee (le LKT e le LKC) e le restanti L che dipendono dalla natura dei lati delle rete in esame.

L'analisi generica prevede l'uso di tutte queste equazioni e porta alla tecnica sistematica denominata tableau sparso. In numerose circostanze si può fare ricorso a variabili ausiliarie che permettono di scrivere le equazioni in forma più compatta e sistematica. Le variabili ausiliarie sono, a seconda dei metodi, delle correnti o delle tensioni e godono della proprietà importante di essere rispettivamente delle basi dello spazio delle correnti o delle tensioni relative alla rete considerata, il che significa che soddisfano rispettivamente ed automaticamente le LKC o le LKT. La scelta di un metodo basato su una base delle tensioni o su una base delle correnti avviene secondo:

- la cardinalità della base utilizzata, in quanto la cardinalità di una base delle tensioni è $N - 1$, mentre quella di una base delle correnti è $L - (N - 1)$;
- le caratteristiche dei lati, dato che volendo utilizzare come nuove incognite del sistema esclusivamente delle tensioni o delle correnti il generico lato deve essere necessariamente o comandato in tensione o comandato in corrente.

I metodi di analisi presi in considerazione qui di seguito saranno:

³questo nel caso generale dei circuiti dinamici o semplicemente algebriche nel caso di circuiti adinamici o in regime sinusoidale

- insiemi di taglio;
- nodi;
- maglie;
- anelli;

Un ulteriore approccio sistematico che farà uso delle equazioni di stato sarà presentato in un'altra dispensa.

6 Analisi ai Nodi

Consideriamo una rete elettrica qualsiasi supponendo che il suo grafo orientato sia connesso (ossia che la rete non abbia parti separate)⁴. Abbiamo visto in precedenza, che per una tale rete connessa era possibile scegliere come base delle tensioni i potenziali di nodo, dopo aver fissato a piacere un nodo come nodo di riferimento (o saldo) a potenziale nullo. Numeriamo i nodi a partire da zero a $N - 1$ assegnando lo zero al nodo scelto come riferimento. Il vettore dei potenziali di nodo $[e]$ è il vettore delle variabili ausiliarie da utilizzare per questa tipologia di analisi. A partire dal grafo, si costruisce la matrice di incidenza ridotta $[A_R]$ come detto in precedenza. A partire da questa si possono scrivere le LKC (introducendo il vettore delle correnti di lato $[i(t)]$ e le LKT (con il vettore delle tensioni di lato $[v(t)]$ come segue:

$$[A_R] \cdot [i(t)] = 0 \quad (31)$$

$$[v(t)] = [A_R]^t [e(t)] \quad (32)$$

Per completare l'analisi occorre quindi solo esprimere le leggi di lato in maniera utile. Sotto l'ipotesi necessaria che il generico lato sia comandato in tensione avremo (nel caso generale di componente anche non lineare, dinamico e tempo variante)

$$[i] = f([v], [\dot{v}], [\ddot{v}], \dots, t) \quad (33)$$

dove con i simboli $\dot{()}$, $\ddot{()}$, ecc., indichiamo le derivate di vario ordine e con f indichiamo una generica funzione. A questo punto il sistema risolvibile sarà:

$$[A][i] = 0; \quad (34)$$

⁴Del resto, come abbiamo detto in precedenza, se la rete fosse composta da parti separate, sarebbe sempre possibile collegare queste parti separate connettendole tutte ad un stesso nodo.

$$[v] = [A]^t \cdot [e]; \quad (35)$$

$$[i] = f([v], [\dot{v}], [\ddot{v}], \dots, t) \quad (36)$$

ovvero

$$[A]f([A]^t[e], [A]^t[\dot{e}], [A]^t[\ddot{e}], \dots, t) = 0. \quad (37)$$

Questo è un sistema di $N - 1$ equazioni in $N - 1$ incognite. Consideriamo adesso per semplificare la trattazione e renderla realmente utile il caso di reti lineari tempo invarianti. Le leggi di lato in questo caso potranno ricondursi in un dominio trasformato (ad esempio Laplace) ad espressioni del tipo:

$$[i] = [Y(s)][v] - [is] \quad (38)$$

dove $[Y(s)]$ è una matrice delle ammettenze che lega il vettore delle correnti di lato e il vettore delle tensioni di lato, mentre $[is]$ è il vettore delle correnti dei generatori indipendenti relativi ai lati. Se non sono presenti elementi accoppiati la generica corrente di lato dipende esclusivamente dal corrispondente termine di tensione di lato e di conseguenza la matrice $[Y(s)]$ risulta essere diagonale. A questo punto possiamo mettere assieme le LKC (34), le LKT (35) e le leggi di lato (38)

$$\begin{aligned} [A][Y(s)][v] - [is] &= 0 \\ \Downarrow \\ [A][Y(s)][A]^T[e] - [is] &= 0 \\ \Downarrow \\ [A][Y(s)][A]^t[e] &= [A][is] \\ \Downarrow \\ [Yn(s)][e] &= [I_{imprese}] \end{aligned} \quad (39)$$

$[Yn(s)] = [A][Y(s)][A]^T$ si chiama matrice fondamentale delle ammettenze ed è sicuramente invertibile per reti resistive per cui si trova

$$[e] = [Yn(s)]^{-1} \cdot [I_{imprese}] \quad (40)$$

Il procedimento visto è un metodo sistematico, esiste però un metodo abbreviato che ci consente di scrivere direttamente la $[Yn(s)]$ e le $[I_{imprese}]$. Questo vale quando, più in generale, la rete è priva di elementi accoppiati (cioè mutue induttanze e generatori pilotati). In tal caso $[Yn(s)]$ è simmetrica infatti

$$[Yn(s)]^T = [A][Y(s)][A]^t = [A][Y(s)]^t[A]^t = [A][Y(s)][A]^t \quad (41)$$

in quanto $[Y(s)]$ è diagonale. Analoghe considerazioni si possono fare qualora si applichi il metodo nel dominio della frequenza o in un'analisi fasoriale. In particolare il generico elemento della matrice sarà

- Yn_{ii} = somma delle ammettenze di tutti i lati che concorrono nel nodo i -esimo
- Yn_{ij} = valore, cambiato di segno, della somma di tutte le ammettenze che collegano il nodo i al nodo j .
- gli elementi di $[I_{impresse}]$ sono invece dati dalla somma algebrica di tutte le correnti dei generatori che entrano nel generico nodo.

7 Analisi agli insiemi di taglio

Nell'analisi agli insiemi di taglio si scelgono come variabili ausiliarie le tensioni di lato d'albero $[v_a]$ di un qualsiasi albero ottenuto a partire dal grafo della rete; queste tensioni di lato d'albero costituiscono una base dello spazio delle tensioni. Si scrivono le LKC agli insiemi di taglio fondamentali, cioè gli insiemi di taglio costituiti esclusivamente da un solo lato d'albero e da sole corde. Poiché i lati d'albero sono $N - 1$ così scriveremo $N - 1$ LKC linearmente indipendenti in quanto in ognuna di esse sarà presente una corrente in esclusiva (la corrente del lato

$$[T] \cdot [i(t)] = [0]. \quad (42)$$

Le tensioni di lato $[v]$ si possono esprimere tramite la base delle tensioni di lato d'albero $[v_a]$ ($N-1$ tensioni), alla stessa stregua del metodo per i potenziali ai nodi

$$[v] = [T]^t [v_a] \quad (43)$$

A questo punto si possono mettere assieme le LKC, le leggi delle tensioni di lato e le leggi di lato della nostra rete come fatto per il metodo ai nodi.

$$\begin{aligned} [T] \cdot [i] &= 0; \\ [v] &= [T]^T \cdot [v_a]; \\ [i] &= f([v], [\dot{v}], [\ddot{v}], \dots, t) \end{aligned} \quad (44)$$

trovando

$$[T] \cdot f([T]^T [v_a], [T]^T [\dot{v}_a], [T]^T [\ddot{v}_a], \dots, t) = [0] \quad (45)$$

Ancora una volta per reti LTI utilizzando la solita notazione troviamo

$$[Yn(s)][v_a] = [Iimpresse] \quad (46)$$

dove questa volta è la matrice $[Yn(s)]$ è la matrice fondamentale degli insiemi di taglio. Gli elementi di questa matrice possono essere ricavati nel caso di un'analisi nel dominio della frequenza o per reti puramente resistive in maniera immediata sotto l'ipotesi aggiuntiva che non ci sono elementi accoppiati nella rete (mutue induttanze e generatori pilotati).

- Yn_{ii} = Somma delle ammettenze dell'insieme di taglio i
- Yn_{ij} = somma delle ammettenze a comune tra i due insiemi di taglio i e j , presa col segno + se le direzioni di riferimento dei due insiemi di taglio concordano sulle conduttanze considerate, col segno - altrimenti.
- L'elemento i -esimo del vettore $[Iimpresse]$ è pari alla somma algebrica delle correnti dei generatori indipendenti che appartengono all' i -esimo insieme di taglio e hanno verso concorde a quello della dell'insieme di taglio considerato.

8 Analisi agli anelli

Dualmente ai metodi precedentemente illustrati introduciamo adesso il metodo agli anelli e alle maglie che usano invece come variabili ausiliarie delle correnti. Il metodo agli anelli in particolare può essere usato esclusivamente per reti planari, cioè reti che possono essere tracciate su un piano in modo tale che nessuna coppia di lati si intersechi in un punto che non sia un nodo. Chiamiamo anello interno la maglia della rete che non contiene nessun lato al suo interno. Chiamiamo anello esterno qualsiasi maglia della rete che non contiene nessun lato al suo esterno. Si può dimostrare che data una rete R di L lati e N nodi il numero di anelli interni è $L - N + 1$, per un totale di $L - N + 2$ anelli (interni + esterno). Per ciascun anello si può scrivere una LKT, per un totale di $L - N + 2$ equazioni. È però più utile scrivere le LKT agli $L - N + 1$ anelli interni (e come se considerassimo l'anello esterno allo stesso modo del nodo di riferimento nell'analisi ai nodi) in quanto in questo caso queste $L - N + 1$ equazioni risultano linearmente indipendenti. Si supponga di orientare tutti gli anelli interni con verso orario. Si può costruire la matrice $[M]$ degli anelli ridotta, avente $L - N + 1$ righe e L colonne così definita:

- $m_{ij} = 1$ se il lato j appartiene all'anello i ed ha verso concorde con quello dell'anello

- $m_{ij} = -1$ se il lato j appartiene all'anello i ed ha verso discorde con quello dell'anello
- $m_{ij} = 0$ altrimenti.

A questo punto si può vedere che se $[v]$ è il vettore delle tensioni di lato le LKT si scrivono immediatamente come segue:

$$[M][v] = [0]. \quad (47)$$

Se introduciamo adesso come variabili ausiliarie le correnti di anello $[j]$ (L-N+1) possiamo esprimere tutte le correnti di lato in funzione delle correnti di anello

$$[i] = [M]^t[j]. \quad (48)$$

Per completare l'analisi occorre esprimere le leggi di lato, ma in questo caso dualmente a quanto detto in precedenza per i metodi che usano come variabili ausiliarie delle tensioni, avendo adottato come uniche incognite delle correnti, il lato generico deve essere necessariamente comandato in corrente, in modo da poter esprimere la tensione di lato in funzione delle correnti di lato e di conseguenza delle correnti di anello. In generale le leggi di lato potranno essere scritte per elementi dinamici generici pilotati in corrente

$$[v] = f([i], [\dot{i}], [\ddot{i}], \dots, t) \quad (49)$$

A questo punto si possono mettere assieme le LKT, le leggi delle correnti di lato e le leggi di lato della nostra rete

$$\begin{aligned} [M] \cdot [v] &= 0 \\ [i] &= [M]^t \cdot [j] \\ [v] &= f([i], [\dot{i}], [\ddot{i}], \dots, t) \end{aligned}$$

trovando

$$[M]f([M]^T[j], [M]^T[\dot{j}], [M]^T[\ddot{j}], \dots, t) = 0 \quad (50)$$

che è un sistema di $L - N + 1$ equazioni in L-N+1 incognite.

Qualora si operino le ben note trasformazioni sui generatori le relazione tra le leggi di lato in generale nel dominio del tempo possono essere espresse dalla seguente equazione:

$$[v] = [Z(s)][i] - [vs] \quad (51)$$

dove $[Z(s)]$ è una matrice delle impedenze che esprime il legame tra le tensioni di lato e il vettore delle correnti di lato. Qualora non siano presenti

elementi accoppiati la generica corrente di lato dipende esclusivamente dal corrispondente termine di tensione di lato e di conseguenza la matrice $[Z(s)]$ risulta essere diagonale. A questo punto possiamo mettere assieme le LTC le LKT e le leggi di lato

$$\begin{aligned}
 [M] \cdot [v] &= 0 \\
 \Downarrow \\
 [M]([Z(s)][i] - [Vs]) &= 0 \\
 \Downarrow \\
 [M][Z(Ds)][M]^t[J] - [M][Vs] &= 0 \\
 \Downarrow \\
 [M][Z(s)][M]^t[J] &= [M][Vs] \\
 \Downarrow \\
 [Zn(D)][J] &= [Vimpresso]
 \end{aligned}$$

si chiama matrice delle impedenze alle maglie e nel caso in cui la rete ammetta soluzione unica (vale sempre per reti resistive) si trova

$$[J] = [Zn(s)]^{-1}[Vimpresso] \quad (52)$$

Quando, più in generale, la rete è priva di elementi accoppiati (cioè mutue induttanze e generatori pilotati) $[Zn(s)]$ è simmetrica e si ha

- Zn_{ii} = somma delle impedenze di tutti i lati che appartengono all'anello i-esimo
- Zn_{ij} = valore, cambiato di segno, della somma di tutte le impedenze di tutti i lati comuni all'anello i-esimo e all'anello j-esimo.
- gli elementi di $[Vimpresso]$ sono invece dati dalla somma algebrica di tutte le tensioni dei generatori indipendenti che appartengono all'anello i-esimo e hanno verso concorde.

9 Analisi alle maglie

L'analisi alle maglie è molto simile a quella agli anelli a parte qualche questione generale e la sua validità anche per reti non planari. In questo caso si scelgono come variabili ausiliarie le correnti alle corde (ossia ai lati di co-albero) $[j]$ relativi ad un qualsiasi albero ottenuto a partire dal grafo della rete; queste correnti chiamate correnti alle maglie fondamentali costituiscono una base dello spazio delle tensioni. Infatti se si scrivono le LKT alle maglie fondamentali, cioè quelle maglie costituite esclusivamente da un sola corda e lati d'albero, queste risultano tra loro linearmente indipendenti perché in ciascuna di esse è presente in esclusiva una tensione (la tensione della corda considerata). A questo punto possiamo scrivere le LKT alle maglie fondamentali come segue:

$$[M] \cdot [v] = 0 \quad (53)$$

dove M è la matrice delle maglie fondamentali che già abbiamo visto in precedenza. Le correnti di lato sono legate al vettore correnti di maglia $[j]$ dalla semplice relazione

$$[i] = [M]^t[j]. \quad (54)$$

Se a questo punto si considerano le leggi di lato e si mettono assieme alle LKT, alle leggi delle correnti di lato possiamo procedere nell'analisi in maniera del tutto analoga a quanto fatto in precedenza. In particolare la matrice $[Zn(s)]$ che si ottiene è la matrice fondamentale alle maglie e i suoi elementi possono trovarsi in maniera immediata sotto l'ipotesi aggiuntiva che non ci sono elementi accoppiati nella rete (mutue induttanze e generatori pilotati). In questo caso la matrice $[Zn]$ è simmetrica e i generici elemento sono dati da:

- Zn_{ii} Somma delle impedenze che fanno parte della maglia i -esima
- Zn_{ij} somma algebrica delle impedenze (ammettenze) a comune tra le due maglie i e j , prese col segno $+$ se le impedenze sono percorse con verso concorde dalle due correnti di maglia, col segno $-$ altrimenti.
- L'elemento i -esimo del vettore $[Vg^*]$ è pari alla somma algebrica delle tensioni dei generatori che appartengono alla maglia i e hanno verso concorde a quello della maglia stessa.

10 Osservazioni sui metodi sistematici

- nel caso di reti RLCM senza generatori pilotati le matrici fondamentali sono ancora simmetriche.

- nel caso siano presenti elementi accoppiati non è semplice scrivere direttamente le matrici fondamentali dei vari metodi. È però possibile continuare ad utilizzare le precedenti definizioni adottando il seguente artificio. Per la scrittura delle equazioni si usa solitamente considerare in un primo passo i generatori pilotati come se fossero dei generatori indipendenti che quindi vanno a far parte del termine a secondo membro. Dopo si sostituiscono ai generatori pilotati le loro espressioni in funzione delle variabili di rete da cui dipendono e si esprimono tali variabili in termini delle variabili ausiliarie usate nell'analisi. A questo punto si ricombinano i due termini e si ottiene l'effettiva espressione del sistema di equazioni.
- se la rete presenta dei lati in cui sono presenti esclusivamente dei generatori indipendenti ad esempio di tensione, che non fanno parte quindi dei lati pilotati in tensione, e si vuole condurre un'analisi adottando come variabili ausiliarie delle tensioni è comunque possibile farlo se si sceglie un albero che contiene tra i suoi lati d'albero tutti i generatori di tensione indipendenti. Questo fa sì che la tensione di lato d'albero relativa ai lati contenenti generatori indipendenti sia determinata e quindi riduce ulteriormente il numero delle incognite. Ricordiamo che una scelta di questo genere è sempre possibile a meno che i generatori indipendenti di tensione costituiscano una maglia. A questo punto si dovrà comunque scrivere una LKC ad uno dei nodi di ciascun generatore per ottenere la corrente relativa a quel lato. Il ragionamento relativo ai generatori ideali di corrente è perfettamente duale (scegliendo questa volta l'albero in modo che i generatori indipendenti facciano parte del co-albero).
- Nel caso in cui si sia condotta l'analisi nel dominio di Laplace le radici dell'equazione $\det[F(s)] = 0$ dove $[F(s)]$ la matrice fondamentale di uno qualsiasi dei metodi precedentemente descritti, sono pari alle frequenze naturali non nulle della rete.
- Nel caso in cui non sia possibile per qualche lato esprimere la legge di lato in maniera esplicita in funzione di variabili ausiliarie, si può aggiungere la corrente o la tensione (a seconda del metodo adottato) come ulteriore variabile, in questo caso il corrispettivo metodo si dice modificato.
- Le equazioni del metodo alle maglie fondamentali e del metodo agli insiemi di taglio permettono di scrivere in maniera facile le equazioni di stato del sistema, avendo scelto opportunamente l'albero del grafo.