Equazioni di Stato: soluzione tramite la matrice esponenziale

A. Laudani

November 15, 2016

Un po' di Sistemi

Consideriamo il problema di Cauchy legato allo stato della nostra rete elettrica

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}(\mathbf{t}) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}(\mathbf{t}) \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X_o} \end{cases} \tag{1}$$

Per la sua soluzione sfruttiamo la trasformata di Laplace $\mathcal{L}\{\cdot, s\}$ ed esprimiamo quindi il problema come segue:

$$s\mathcal{L}\{\mathbf{X}(\mathbf{t}), \mathbf{s}\} - \mathbf{X_o} = \mathbf{A} \cdot \mathcal{L}\{\mathbf{X}(\mathbf{t}), \mathbf{s}\} + \mathbf{B} \cdot \mathcal{L}\{\mathbf{U}(\mathbf{t}), \mathbf{s}\} \tag{2}$$

Di seguito usiamo $\mathbf{X}(\mathbf{s}) = \mathcal{L}\{\mathbf{X}(\mathbf{t}), \mathbf{s}\}$ e $\mathbf{U}(\mathbf{s}) = \mathcal{L}\{\mathbf{U}(\mathbf{t}), \mathbf{s}\}$

Introduciamo la matrice identità $\mathbf{I}$ e facciamo qualche calcolo

$$s\mathbf{I} \cdot \mathbf{X(s)} - \mathbf{X_o} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X(s)} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{U(s)} \tag{3}$$

$$s\mathbf{I} \cdot \mathbf{X(s)} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{X(s)} = \mathbf{X_o} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{U(s)} \tag{4}$$

$$[s\mathbf{I} - \mathbf{A}] \cdot \mathbf{X(s)} = \mathbf{X_o} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{U(s)} \tag{5}$$

$$\mathbf{X(s)} = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \cdot [\mathbf{X_o} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{U(s)}] \tag{6}$$

Antitrasformando $\mathbf{X(t)} = \mathcal{L}^{\mathbf{-1}}\left\{\mathbf{X(s)}, \mathbf{t}\right\}$ e ricordando che

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\right\} = e^{\mathbf{At}} \tag{7}$$

e che l'antitrasformata di un prodotto è un integrale di convoluzione, troviamo la soluzione del problema di Cauchy espressa mediante l'integrale di Lagrange

$$\mathbf{X}(\mathbf{t}) = \mathcal{L}^{-1}\left\{[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}\cdot[\mathbf{X_o}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{U}(\mathbf{s})]\,,t\right\} = \tag{8}$$

$$= \int_0^t e^{\mathbf{A}(\mathbf{t}-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{U}(\tau)\mathbf{d}\tau + \mathbf{e}^{\mathbf{At}}\cdot\mathbf{X_o} \tag{9}$$

Questa espressione è abbastanza interessante anche perchè ci permette di distinguere la risposta ad ingresso zero $e^{\mathbf{At}}\cdot\mathbf{X_o}$ dalla risposta a stato zero $\int_0^t e^{\mathbf{A}(\mathbf{t}-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{U}(\tau)\mathbf{d}\tau$ (dette anche rispettivamente risposta libera e risposta forzata).

Dobbiamo però aggiungere qualche informazione riguardo la definizione e le procedure di calcolo della matrice esponenziale $e^{\mathbf{At}}$. Iniziamo con la definizione. Così come

$$e^{at} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{k!} \tag{10}$$

risulta

$$e^{\mathbf{At}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{At})^k}{k!} \tag{11}$$

dove chiaramente intendiamo la potenza di una matrice in termini del suo prodotto $\mathbf{A^k} = \underbrace{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdots \mathbf{A}}_{\mathbf{k}}$

Fortunatamente la serie che definisce la $e^{\mathbf{At}}$ è sempre convergente e quindi la matrice esponenziale è ben definita. Inoltre la matrice esponenziale, in generale, soddisfa le seguenti proprietà: $e^{\mathbf{0}} = \mathbf{I}$
$e^{\mathbf{At_1}} \cdot e^{\mathbf{At_2}} = e^{\mathbf{A(t_1+t_2)}}$
Se $\mathbf{T}$ è una matrice invertibile allora $e^{\mathbf{TAT}^{-1}} = \mathbf{Te^A T^{-1}}$.
$\frac{d}{dt}e^{\mathbf{At}} = \mathbf{Ae^{At}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e^{At}}$ Per il calcolo della matrice esponenziale non viene utilizzata la serie di potenze dato che è costituita da una sommatoria di infiniti addendi. Infatti utilizzando gli autovettori o nel caso che più ci interessa il teorema di Caley-Hamilton si ricava una serie con un numero finito di termini.

Per semplicità consideriamo il caso di matrice $\mathbf{A}$ diagonalizzabile, il che sicuramente accade se i suoi n autovalori λ_k con $k = 1 \cdots n$ sono distinti. In questo caso succede che esiste una matrice $\mathbf{P}$ tale che

$$\mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda} \tag{12}$$

dove $\mathbf{\Lambda}$ è la matrice che ha nella diagonale gli autovalori di $\mathbf{A}$ ossia

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{13}$$

Si noti che a questo punto moltiplicando per $\mathbf{P}$ ambo i membri troviamo

$$\mathbf{AP} = \mathbf{P\Lambda} \tag{14}$$

ossia analoga a

$$\begin{aligned} A\mathbf{t}_1 &= \mathbf{t}_1\lambda_1 \\ A\mathbf{t}_2 &= \mathbf{t}_2\lambda_2 \\ &\vdots \\ A\mathbf{t}_n &= \mathbf{t}_n\lambda_n \end{aligned} \tag{15}$$

e quindi $\mathbf{P}$ è costituita dagli autovettori $\mathbf{t_k}$ (l'autovettore associato all'autovalore λ_k) e per questo di seguito la indichiamo con $\mathbf{T}$

Notiamo inoltre che:
$\mathbf{A^k} = (\mathbf{T\Lambda T^{-1}})^\mathbf{k} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{T^{-1}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{T^{-1}} \cdots = \mathbf{T\Lambda^k T^{-1}}$ e quindi:

$$e^{\mathbf{At}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A^k t^k}}{k!} = \mathbf{T} \left[\sum_{\mathbf{k=0}}^{\infty} \frac{\mathbf{\Lambda^k t^k}}{\mathbf{k}!} \right] \mathbf{T^-1} = \mathbf{T e^{\Lambda t} T^{-1}} \qquad (16)$$

ma ancora

$$e^{\mathbf{\Lambda t}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{\Lambda^k t^k}}{k!} = \mathbf{I} + \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \frac{\mathbf{t}}{\mathbf{1}!} + \tag{17}$$

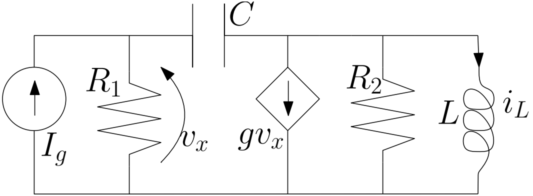
$$\begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^2 \end{bmatrix} \frac{t^2}{2!} + \dots = \tag{18}$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 + \frac{\lambda_1 t}{1!} + \frac{\lambda_1^2 t^2}{2!} + \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 + \frac{\lambda_2 t}{1!} + \frac{\lambda_2^2 t^2}{2!} + \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 + \frac{\lambda_n t}{1!} + \frac{\lambda_n^2 t^2}{2!} + \dots \end{bmatrix} = \tag{19}
$$

Il calcolo della matrice esponenziale $e^{\mathbf{At}}$ si riconduce al calcolo dei suoi autovalori e degli autovettori destri e sinistri. Infatti, possiamo notare anche che la matrice $\mathbf{T}^{-1}$ altro non è che la matrice sinistri, così come $\mathbf{T}$ era la matrice degli autovalori destri. Il caso relativo alla matrice non diagonalizzabile si risolve in maniera analoga ricorrendo però alla forma canonica di Jordan e viene qui tralasciato.

Esempio

Immaginiamo di considerare il circuito in figura, con i seguenti dati $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 1\Omega$, $g = 1/2\ S$, $L = 1/2H$, $C = 1/4F$.



Scegliendo come prima variabile di stato la tensione sul capacitore e come seconda variabile di stato la corrente nell'induttore $\mathbf{X(t)} = [\mathbf{v_C(t) i_L(t)}]$, si possono ricavare le seguenti matrici **A** e **B**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{20}$$

Risolvendo il problema agli autovalori tramite il polinomio caratteristico $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ trovato attraverso il determinante

$$\mathbf{A} = |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1+\lambda & -1 \\ 1 & 1+\lambda \end{vmatrix} \tag{21}$$

troviamo i due autovalori $\lambda_{1,2} = -1 \pm j$. Impostando invece i due problemi agli autovettori troviamo invece

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ j\frac{\sqrt{2}}{2} & -j\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -j\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & j\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \tag{22}$$

e quindi

$$e^{\mathbf{At}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ j\frac{\sqrt{2}}{2} & -j\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -j\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & j\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \tag{23}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\lambda_1 t} & \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\lambda_2 t} \\ j\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\lambda_1 t} & -j\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -j\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & j\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \tag{24}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t}\right) & \frac{j}{2}\left(e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}\right) \\ \frac{j}{2}\left(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}\right) & \frac{1}{2}\left(e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t}\right) \end{bmatrix} \tag{25}$$

ma ricordando che $\lambda_1 = -1 + j$ e $\lambda_2 = -1 - j$ e che $e^{(\alpha + j\beta)t} = e^{\alpha t}\left[cos(\beta t) + jsin(\beta t)\right]$, troviamo ulteriormente che $e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t} = 2e^{-t}cos(t)$, mentre $e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t} = j2e^{-t}sin(t)$ da cui

$$e^{\mathbf{At}} = \begin{bmatrix} e^{-t}cos(t) & e^{-t}sin(t) \\ -e^{-t}sin(t) & e^{-t}cos(t) \end{bmatrix} \tag{26}$$

Calcolo di $e^{\mathbf{At}}$ tramite il teorema di Hamilton-Cayley

Innanzittutto chiariamo che non ci preoccupiamo dell'enunciato formalmente più corretto del teorema di Hamilton-Cayley, ma ci limitiamo a darne l'espressione più utili ai nostri scopi.
Sia $\mathbf{A}$ *una matrice quadrata di dimensione* $n \times n$ *nel campo dei reali (o dei numeri complessi), allora se* $p(\lambda) = 0$ *è il suo polinomio caratteristico, allora vale pure* $p(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ Se, ad esempio, applichiamo questo teorema alla matrice $\mathbf{A}$ precedentemente ricavata troviamo

$$\mathbf{A}^2 + 2\mathbf{A} + 2\mathbf{I} = \mathbf{0} \tag{27}$$

che comporta $\mathbf{A}^2 = -2\mathbf{A} - \mathbf{I}$. Ma così come $\mathbf{A}$ si può mettere in funzione dei precedenti $(\mathbf{A}, \mathbf{I})$ lo stesso si può fare per il generico $\mathbf{A}^{\mathbf{k}}$ con $k > 2$.

In generale per una matrice $\mathbf{A}$ $n \times n$ avremo che $\mathbf{A^k}$, con $k \geq n$ si potrà scrivere come combinazione lineare di $\left\{\mathbf{I}, \mathbf{A}, \mathbf{A^2}, \cdots, \mathbf{A^{n-1}}\right\}$
A questo punto possiamo scrivere:

$$e^{\mathbf{At}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\mathbf{A^k} = \sum_{\mathbf{k=0}}^{\infty} \mathbf{g_k(t)A^k} \qquad (28)$$

dove $g_k(t) = \frac{t^k}{k!}$, ma anche

$$e^{\mathbf{At}} = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k(t)\mathbf{A^k} \qquad (29)$$

Il calcolo di $e^{\mathbf{At}}$ si riconduce quindi al calcolo delle $\gamma_k(t)$

Senza dare qui di seguito una dimostrazione, che coinvolgerebbe l'uso delle funzioni scalari definite a partire da una funzione matriciale e la loro valutazione in corrispondenza degli autovalori della matrice di partenza, diciamo che, sempre nel caso di autovalori distinti il calcolo delle funzioni $\gamma_k(t)$ si riconduce alla soluzione del problema:

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ . & . & \ddots & . & \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}}_{MatricediVandermonde} \begin{bmatrix} \gamma_0(t) \\ \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_{n-1}(t) \end{bmatrix} \tag{30}$$

ossia al calcolo degli autovalori e dell'inversa della matrice di Vandermonde.

Torniamo al calcolo relativo alla matrice **A** dell'esempio numerico considerato:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \tag{31}$$

gli autovalori come abbiamo visto sono $\lambda_1 = -1 + j$ e $\lambda_1 = -1 - j$ da cui :

$$\begin{bmatrix} \gamma_0(t) \\ \gamma_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1+j \\ 1 & -1-j \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{-t}\left(cos(t) + jsin(t)\right) \\ e^{-t}\left(cos(t) - jsin(t)\right) \end{bmatrix} \tag{32}$$

$$\begin{bmatrix}\gamma_0(t)\\ \gamma_1(t)\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1-j & 1+j\\ -j & j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-t}\left(cos(t)+jsin(t)\right)\\ e^{-t}\left(cos(t)-jsin(t)\right)\end{bmatrix} = \tag{33}$$

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}(1-j)e^{-t}\left(cos(t)+jsin(t)\right)+(1+j)e^{-t}\left(cos(t)-jsin(t)\right)\\ -je^{-t}\left(cos(t)+jsin(t)\right)+je^{-t}\left(cos(t)-jsin(t)\right)\end{bmatrix} = \tag{34}$$

$$\begin{bmatrix}e^{-t}\left(cos(t)+sin(t)\right)\\ e^{-t}sin(t)\end{bmatrix} \tag{35}$$

da cui

$$e^{\mathbf{At}} = e^{-t}\left(cos(t) + sin(t)\right)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} + e^{-t}sin(t)\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix} = \quad (36)$$

$$\begin{bmatrix}e^{-t}\left(cos(t) + sin(t)\right) & 0\\ 0 & e^{-t}\left(cos(t) + sin(t)\right)\end{bmatrix} + \quad (37)$$

$$\begin{bmatrix}-e^{-t}sin(t) & e^{-t}sin(t)\\ -e^{-t}sin(t) & -e^{-t}sin(t)\end{bmatrix} = \quad (38)$$

$$= \begin{bmatrix}e^{-t}cos(t) & e^{-t}sin(t)\\ -e^{-t}sin(t) & e^{-t}cos(t)\end{bmatrix} \quad (39)$$