Corso di elettrotecnica* Materiale didattico: variabili di stato

A. Laudani

16 novembre 2006

1 Introduzione

Si è già visto come una rete elettrica possa essere descritta mediante un sistema di equazioni algebriche o differenziali che si ottengono applicando le leggi di Kirchhoff e le relazioni di lato. La principale difficoltà nel trattamento di questo sistema, soprattutto nel caso in cui sia differenziale, è legato all'elevato numero di equazioni in gioco. Per superare questo problema sono stati discussi dei metodi che si basano sull'uso di basi o delle tensioni o delle correnti che permettono di 'semplificare' la trattazione. In questi casi le dimensioni del problema in esame saranno legate al numero di nodi e di lati. La metodologia che verrà discussa in questa dispensa permette di scrivere il sistema di equazioni che governa la rete elettrica in esame in termini di un sistema di equazioni differenziali del primo ordine nel dominio del tempo, sistema che usa però delle opportune variabili che verrano indicate col nome di variabili di stato. L'uso delle variabili di stato può risultare vantaggioso nell'analisi delle reti elettriche soprattutto per la semplicità con cui è possibile estendere la loro formulazione nel caso di reti tempo varianti e non lineari. Inoltre permette di considerare sotto una diversa veste il comportamento energetico di una rete elettrica.

2 Concetto di stato di una rete elettrica

Il termine stato è un concetto astratto che può essere rappresentato in molti modi. Se si indica l'insieme dei valori istantanei delle correnti e delle tensioni

*A.A. 2006/2007, C.d.L. in Ingegneria Informatica, 6 crediti (60 ore), corso A-L, docente del corso l'ing. A. Laudani, e-mail: alaudani@diees.unict.it di lato come lo 'stato' di una rete elettrica, allora la cooscenza dei valori istantanei di tutte queste variabili determina questo stato istantaneo. Del resto non tutti questi valori istantanei sono necessari al fine di determinare lo stato istantaneo, in quanto alcuni possono essere calcolati a partire da altri. (problema circuiti adinamici). Risulta chiaro che il concetto di stato necessita quindi di una più precisa caratterizzazione. Un insieme di variabili di rete viene detto stato della rete se soddisfa le due seguenti proprietà:

1. la conoscenza dello stato in qualsiasi istante t_0 e degli ingressi della rete per $t \geq t_0$ determina in maniera univoca lo stato in qualsiasi istante $t > t_0$;

2. la conoscenza dello stato all'istante t e degli ingressi assieme con alcune delle loro derivate all'istante t determina in maniera univoca il valore di ogni variabile di rete all'istante t.

Da quanto detto si può dedurre che lo stato può essere considerato un vettore, le cui componenti possono essere indicate col nome di variabili di stato. Le variabili di rete che sono candidate a divenire variabili di stato sono chiaramente correnti e tensioni di lato. Il problema sta nella scelta di queste variabili al fine di formulare le equazioni di stato.

3 Concetto di stato di una rete elettrica 1

Si consideri una rete elettrica ad un certo istante t_0 e tutte le grandezze di lato $i_k(t_0)$ e $v_k(t_0)$ per $k = 1, 2 \ldots L$, dove L è il numero complessivo di lati, o un insieme caratteristico di esse, cioè ad esempio i potenziali ai nodi o le correnti di anello, ecc. [1]. Inoltre siano noti i generatori indipendenti $v_g(t)$ e $i_g(t)$. Tutte queste variabili individuano la situazione della rete all'istante t_0 considerato. Un problema interessante è quello di stabilire l'evoluzione della rete per $t > t_0$ supponendo nota la situazione all'istante t_0. In generale non occorre conoscere tutte le grandezze (variabili) di rete (VR), ma un suo sottoinsieme che chiameremo stato (VR)*. Si definisce stato di una rete elettrica un insieme di variabili di rete che gode delle seguenti proprietà caratteristiche:

1. Noto lo stato ad un certo istante t_0 e noti i generatori (e le derivate?) in t_0 posso conoscere qualsiasi variabile di rete in t_0.

[1] nel caso di induttori e condensatori possiamo conoscere il flusso di campo mangetico phi (t0) o la carica q(t0)

2. Noto lo stato ad un certo istante t_0 e noti i generatori (e le derivate?) per $t \geq t_0$ posso ricavarmi l'evoluzione di tutte le grandezze di rete per $t \geq t_0$.

4 Scelta delle variabili di stato

Per condizioni molto generali lo stato di una qualsiasi rete è determinato da tutte le tensioni (o cariche) dei condesatori e da tutte le correnti o flussi degli induttori. (considerazioni sull'energia) Fanno eccezione:

- maglia di condensatori: in tal caso poichè le tensione dei condesatori della maglia sono tali da avere somma nulla (in virtù della LKT) si deve considerare un condensatore in meno per ogni maglia di condensatori.
- insieme di taglio di soli induttori (analogo al precedente)
- presenza nella rete di generatori pilotati tali da realizzare configurazioni particolari che riducano il numero di variabili di stato. (spigare meglio)
- presenza di induttori mutuamente accoppiati con coefficiente di accoppiamento unitario (?);

In generale lo stato $[s]$ è rappresentato da un vettore

$$[s] = [v_{C1} v_{C2} \ldots i_{L1} i_{L2} \ldots]$$

Proviamo ora in qualche modo le due proprietà:

1. ci chiediamo come passare dalla conoscenza delle variabili di stato ad un certo istante t0 alla conoscenza di tutte le variabili di rete a quell'istante t0. Se per il momento escludiamo i due casi particolari possiamo ricavare tutte le variabili di rete come segue. Infatti all'istante t0 possiamo assimilare gli induttori a dei generatori di corrente e i condensatori a dei generatori di tensione noti, per cui la rete all'istante t0 diviene una rete rwsistiva. La rete resistiva se non sono presenti resistori con resistenza negativa ammettono una e una sola soluzione; infatti usando il metodo alle maglie (per esempio) $[R*][J] = [Vg*]$ e si può dimostrare che $det[R*] \neq 0$ e quindi il sistema ammette una e una sola soluzione.

2. Si può dimostrare nel caso di reti RLC lineari tempo invarianti che si ha la relazione:

$$\frac{d[s(t)]}{dt} = [A][s(t)] + [B][g(t)] \tag{1}$$

dove $[A]$ e $[B]$ sono matrici di costanti e $g(t)$ è una matrice di eccitazioni (ingressi). Questo è un sistema di equazioni differenziali del 1° ordine in forma normale.

Dato $[s(t)]$ vediamo come si può ricavare subito $\frac{ds}{dt}$. Infatti

$$[s] = [v_{C1}, v_{C2}, \ldots, i_{L1}, i_{L2}, \ldots]^T$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d[s]}{dt} = [\frac{i_{C1}}{C1}, \frac{i_{C2}}{C2}, \ldots, \frac{v_{Ll}}{L1}, \frac{v_{L2}}{L2}, \ldots]^T$$

quindi per scrivere le equazioni di stato bisogna fare un'analisi della rete in modo tale da esplicitare ogni corrente di condensatore in funzione della varibile di stato e ogni tensione di induttore in funzione della variabile di stato. Il primo fatto si ottiene scrivendo tante equazioni agli insiemi di taglio particolari in cui compare ogni volta uno e un solo condensatore. In tal modo i_c è espressa tramite combinazione lineare delle variabili di stato e dei generatori indipendenti come volevamo. Dualmente occorre esprimere le tensioni sugli induttori in funzione delle variabili di stato. Ciò si ottiene considerando delle maglie particolari in cui compare uno e un solo induttore. Procedendo tramite equazioni di maglia ed equazioni agli insiemi di taglio riusciamo a descrivere l'evoluzione del sistema RLC sotto forma di equazioni di stato lineare tempo invariante.

Per fare ciò sistematicamente, data la nostra rete dobbiamo cercare una albero, detto albero proprio, (può non essere unico) che goda delle seguenti proprietà: a) tutti i condesatori della rete appartengono all'albero b) tutti gli induttori della rete appartengono al coalbero.

Notiamo che se non si verificano i casi eccezionali visti in precedenza è sempre possibile determinare un albero proprio.

5 Equazioni di stato in forma normale

In una rete lineare di ordine n (ovvero contenente almeno n elementi a memoria) e m sorgenti indipendenti è possibile scrivere il seguente sistema di n equazioni differenziali

$$\frac{d[x_i(t)]}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j(t) + \sum_{j=1}^{h} b_{ij}u_j(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

o in notazione matriciale

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1}(t) \\ \dot{x_2}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x_n}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdot & \cdot & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdot & \cdot & b_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdot & \cdot & b_{nm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ u_m(t) \end{bmatrix} \tag{3}$$

e in forma compatta

$$\frac{d[x(t)]}{dt} = [A][x(t)] + [B][u(t)] \tag{4}$$

Le funzioni reali $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ del tempo t sono chiamate variabili di stato, e il vettore, di dimensione n, $[x(t)]$ da esse formato è detto vettore di stato. Il vettore, di dimensione m, $[u(t)]$ formato dalle m funzioni forzanti o eccitazioni è detto vettore degli ingressi. I coefficienti delle matrici $[A]$ (matrice di stato verificare) e $[B]$ (matrice degli ingressi verificare), dipendono esclusivamente dai parametri della rete elettrica. L'equazione (4) è solitamente chiamata equazione di stato in forma normale. Si noti che le variabili di stato possono coincidere o meno con le variabili d'uscita desiderata della rete elettrica. Ma in virtù delle proprietà che definiscono lo stato stesso è possibile ricavare qualsiasi variabile d'uscita $y(t)$ in termini del vettore di stato e delle eccitazioni

$$y(t) = [C][x(t)] + [D][u(t)] \tag{5}$$

dove i coefficienti dei vettori [C] e [D] dipendono esclusivamente dai componenti della rete. L'equazione (5) è solitamente indicata col nome di equazione dell'uscita e il sistema delle due equazioni (4) e (5) è chiamato equazioni di stato.

6 Stato, variabili di stato ed albero normale

Il primo problema da affrontare è la scelta delle variabili di rete che formeranno lo stato in modo da poter formulare le queazioni di stato. Come è stato già detto in precedenza sebbene si possa immaginare di scegliere l'insieme di tutte le correnti e le tensioni di lato per definire lo stato in quanto sicuramente queste rappresentano lo stato istantaneo, questo non è necessario in quanto alcune di queste grandezze possono calcolarsi a partire da altre. Per esempio la corrente istantanea di un resistore può calcolarsi a partire dal valore della tensione applicando la legge di lato. Nasce quindi la questione del numero minimo di valori istantanei di tensioni e correnti necessarie per determinare completamente l'insieme delle tensioni e correnti di lato istantanee della rete.

In una data rete elettrica, un minimo insieme delle sue variabili di lato è detto insieme completo delle variabili di stato se la conoscenza del loro valore istantaneo è sufficiente a determinare completamente il valori istantaneo di tute le variabili di lato. In una rete lineare tempo invariante non degenere è conveniente scegliere le tensioni dei capacitori e le correnti degli induttori come variabili di stato. Un rete è non degenere se non contiene maglie costituite solo da capacitori o da capacitori e generatori di tensione (dipendenti o indipendenti) o insiemi di taglio composti solo da induttori o da indutori e generatori di corrente (dipendenti o indipendenti). Così non è detto che tutte le tensioni dei capacitori o tutte le correnti degli induttori possano essere variabili di stato. Per scegliere sistematicamente le variabili di stato si introduce il concetto di albero proprio. Un albero proprio di una rete connessa è un albero che contiene tutte le sorgenti indipendenti di tensione, il maggior numero possibile di capcitori, il minimo numero possibile di induttori e nessun gneneratore indipendente di corrente[2].

6.1 Procedura sistematica per la scrittura delle equazioni di stato di una rete elettrica

Di seguito sono presentati i passi da seguire per la scrittura delle equazioni di stato:

1. In una data rete elettrica N, si assegnino i versi di riferimento per le tensioni e le correnti di lato.

2. Si selezioni un albero normale T e si scelgano come variabili di stato le tensioni dei capacitori di T e le correnti degli induttori appartenenti al coalbero.

3. Tramite le LKC agli insiemi di taglio fondamentali si esprimano tutte le correnti dei lati d'albero in funzione delle correnti dei lati di coalbero.

4. Tramite le LKT alle maglie fondamentali si esprimano tutte le tensioni dei lati di coalbero in funzione delle tensioni di lato d'albero.

5. Si scrivano le leggi di lato per ciascun elemento passivo dividendole in due gruppi:

[2] Questa definizione esclude la possibilità di considerare reti non connesse, ma sappiamo come è possibile superare agevolmente questo problema.

- quelle relative ai capacitori dell'albero e degli induttori del coalbero;
- quelle relative a tutti gli altri componenti passivi.

6. Si esprimano le variabili di lato che non sono legate nè ai componenti scelti come variabili di stato nè alle sorgenti indipendenti in termini delle variabili di stato e delle sorgenti.

7. Sistemare i termini in maniera da scrivere le equazioni risultanti in forma normale

6.1.1 esempio

7 Equazioni di stato per reti tempo varianti e non lineari (Estensione)

Uno dei principali vantaggi dell'approccio che usa variabili di stato nell'analisi di reti elettriche è che può essere facilmente esteso alle reti tempo varianti e non lineari, che non possono invece spesso essere trattate altrettanto facilmente con le altre metodologie. In questo caso è più conveniente scegliere come variabili di stato la carica nei capacitori e il flusso negli induttori invece delle tensioni e correnti rispettivamente. Nel caso si reti lineari tempo invarianti le equazioni di stato possono essere scritte nella stessa forma di prima con la sola differenza che i coefficienti delle matrici dipendono ora dal tempo:

$$\begin{cases} [\dot{x}(t)] = [A(t)][x(t)] + [B(t)][u(t)] \\ [y(t)] = [C(t)][x(t)] + [D(t)][u(t)] \end{cases} \tag{6}$$

Così con l'approccio delle variabili di stato non è più complicato scrivere le equazioni che governano una rete lineare tempo variante rispetto ad una tempo invariante. Chiaramente le soluzioni devono essere determinate in maniera diversa. Per una rete non lineare le equazioni di stato in forma normale si possono scrivere mediante un insieme di equazioni differenziali del primo ordine nella forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \tag{7}$$

8 Eq. di stato per reti non lineari 2

Nel caso di elementi tempo varianti o non lineari conviene adoperare come variabili di stato flussi e cariche, invece di tensioni e correnti. Supponiamo per semplicità elementi tempo invarianti, ma non lineari e dotati di caratteristiche invertibili (cioè biunivoche)
Resistori $v_R - i_R \Longrightarrow i_R = f_R(v_R)$
Induttori $\phi_L - i_L \Longrightarrow i_L = f_L(phi_L)$
Condensatori $q_C - v_C \Longrightarrow v_C = f_C(q_C)$
Verrà fuori un sistema del tipo

$$\frac{d[s(t)]}{dt} = f([s(t)], [g(t)])$$

cioè un'equazione differenziale non lineare in forma normale, dove $[g(t)]$ rappresenta il vettore delle eccitazioni. Se la rete fosse anche tempo variante la funzione f dipenderebbe anche dal tempo

$$\frac{d[s(t)]}{dt} = f([s(t)], [g(t)], t)$$

9 Frequenze naturali delle reti elettriche

Sia data una rete lineare e tempo invariante. Analizzandola con un metodo sistematico, ad esempio quello alle maglie, nel caso più generale possibile si può ottenere un sistema di equazioni integro-differenziali del tipo:

$$[Z*(D)][J(t)] = [Vg*(t)] \tag{8}$$

Si consideri il comportamento della rete in evoluzione libera, cioè il caso in cui gli ingressi sono nulli e lo stato iniziale è non nullo.

$$[Z*(D)][J(t)] = [0] \tag{9}$$

Per ogni variabile di rete $J_k(t)$ si può ottenere una equazione integro-differenziale di ordine minimo, cioè tale che non esiste un'altra equazione differenziale di ordine più piccolo per quella stessa variabile. Ad esempio per la $J_1(t)$ sia

$$Q(D)J_1(t) = 0 \tag{10}$$

dove $Q(D)$ è un operatore polinomiale di grado n in $D = \frac{d}{dt}$. Se $Q(D)$ ha n radici semplici s_k, $k = 1, 2 \ldots n$ Allora l'equazione differenziale omogenea a coefficienti costanti ammetterà soluzioni del tipo

$$J_1(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot e^{s_k t} \tag{11}$$

se le s_k sono tutte radici semplici.
Se invece $Q(D)$ ha n radici ciascuna con una molteplicità allora

$$J_1(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot e^{s_k \cdot t} \exp(s_k \cdot t) + c_{k1} \cdot t \cdot \exp(s_k \cdot t) + \dots (scriveremeglio) \quad (12)$$

Si noti che alcuni coefficienti c_k possono essere nulli a seconda del tipo particolare di condizioni iniziali.

Notiamo che le s_k dipendono dalla topologia e dalla natura dei lati della rete e non dai generatori o dalle particolari condizioni iniziali; esse vengono dette frequenze naturali della variabile di rete $J_1(t)$ In generale:

Diremo che s (reale o complessa) è una frequenza naturale della variabile di rete $x(t)$ generica se, per un dato insieme delle condizioni iniziali, $x(t)$ assumerà un andamento del tipo

$$C \cdot \exp(st)$$

con $C \neq 0$. Notiamo che s deve essere radice della $Q(s) = 0$ (polinomio caratteristico della variabile).

9.1 Ordine della frequenza naturale

Se s_k è una soluzione non semplice (cioè con molteplicità maggiore di 1) allora la soluzione sarà

$$x(t) = C \cdot t^d \cdot \exp(s_k \cdot t) + \dots$$

diremo che s_k è una frequenza naturale di ordine d.

9.2 Frequenze naturali di una rete

Osservazione preliminare:
Consideriamo ora la lista di tutte le variabili di rete ed associamo ad ogni variabile di rete la lista delle frequenze naturali.

$$v_1 \rightarrow \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$$

$$v_2 \rightarrow \{\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \dots, \tilde{s}_k\}$$
$$v_k \rightarrow \{s_1^*, s_2^*, \dots, s_k^*\}$$

Prese ora due qualsiasi variabili non è detto che abbaino lo stesso insieme di frequenze naturali, ma si può dimostrare che, per ogni lato, tensione e corrente hanno lo stesso insieme di frequenze naturali non nulle. Se una variabile di lato ha una frequenza naturale nulla allora se è una resistenza anche la variabile di lato associata avrà la stessa frequenza naturale. Per induttore e condensatore invece questo non vale. In definitiva l'insieme delle frequenze naturali distinte di tuttel le variabili di rete si dicono frequenze naturali della rete. Cioè:

Diciamo che un numero (reale o complesso) s è una frequenza naturale della rete N se s è una frequenza naturale di una certa tensione o di una certa corrente della rete.

Consegue che per trovare lefrequenze naturali non nulle di una rete non è necessario trovare tutte le frequenze naturali di ogni tensione e di ogni corrente della rete ma bastaconoscere solo tensioni o solo correnti e qu di è sufficiente applicare qualsiasi metodo sistematico di analisi della rete.

Teorema (CNS): *Tutte e soo le freuqneze naturali non nulle di una rete sono le radici dell'equazione $det(P(D)) = 0$ ove $[P(D)][v(t)] = [0]$ è il istema di equazioni integrodifferenziali che descrive il comportamento della rete.*

Notiamo che se i_L è constante allora 0 è frequenza naturale per i_L ma non lo è per v_L.

10 Relazione tra stato e frequenze naturali

Per descrivere il sistema usiamo la rappresentazione con lo stato anche in questo caso in evoluzione libera:

$$\frac{d[s(t)]}{dt} = [A][s(t)]$$

posto $D = d/dt$ si ha

$$D[s(t)] = [A][s(t)] \quad \Longrightarrow [A][s(t)] - D[s(t)] = [0]$$

Considerando una matrice unitaria $[I]$ di ordine pari a quello di $[s(t)]$ avremo

$$\{[A] - D[I]\}[s(t)] = [0]$$

confrontanto coni metodi discussi in precendenza ne segue che per determinare le frequenze naturali della rete occorre risolvere l'equzione

$$\det\{[A] - \lambda[I]\} = 0 \tag{13}$$

questo non significa altro che le frequenze naturali non nulle sono gli autovalori della matrice [A].