Circuiti, Sistemi e sicurezza elettrica*
Materiale didattico. Cenni sui sistemi trifase

A. Laudani

6 ottobre 2011

Le reti trifase sono reti elettriche in regime sinusoidale (tutte le variabili di rete hanno andamento sinusoidale isofrequenziale) che possono presentare particolari simmetrie nella topologia, nelle eccitazioni e nei sistemi utilizzatori. I sistemi trifase sono utilizzati negli impianti di generazione, trasmissione e distribuzione dell'energia elettrica in regime sinusoidale, essendo preferiti a quelli monofase quando sono in gioco potenze elettriche elevate per i vantaggi economici e tecnologici che comportano nei dispositivi fisici. Si definisce terna trifase simmetrica un sistema di 3 grandezze sinusoidali isofrequenziali (di pulsazione ω)

$$\begin{cases} s_1(t) = S_{M1} \cdot cos(\omega \cdot t - \varphi_1) \\ s_2(t) = S_{M2} \cdot cos(\omega \cdot t - \varphi_2) \\ s_3(t) = S_{M3} \cdot cos(\omega \cdot t - \varphi_3) \end{cases} \tag{1}$$

In particolare il sistema si dirà simmetrico diretto (inverso) se le grandezze risultano di ampiezze uguali S_M e ordinatamente sfasate in successione in modo che lo sfasamento tra ciascuna grandezza e la successiva sia pari a $2\pi/3$ con l'ordine delle fasi che segue il senso orario (antiorario). Invece una terna simmetrica si dirà omopolare se le tre grandezze sinusoidali che la costituiscono hanno la stessa ampiezze e la stessa fase. Infine una terna si dirà pura se la somma delle tre grandezze sinusoidali e identicamnete nulla per ogni istante t. Risulta che una terna simmetrica diretta o inversa è pura, mentre una terna omopolare è spuria. In particolare una terna simmetrica di generatori di tensioni può essere rappresentata dalle tre tensioni $e_1(t), e_2(t), e_3(t)$

$$\begin{cases} e_1(t) = E_M \cdot cos(\omega \cdot t) \\ e_2(t) = E_M \cdot cos(\omega \cdot t \pm 2\pi/3) \\ e_3(t) = E_M \cdot cos(\omega \cdot t \pm 4\pi/3) \end{cases} \tag{2}$$

*A.A. 2010/2011, C.d.L.M. in Bioingegneria, 9 crediti, docente del corso l'Ing. A Laudani, e-mail: alaudani@diees.unict.it diretta se si considera il segno -, inversa se si considera il segno +. Nella rappresentazione vettoriale i due sistemi sono descritti dai seguenti due diagrammi:

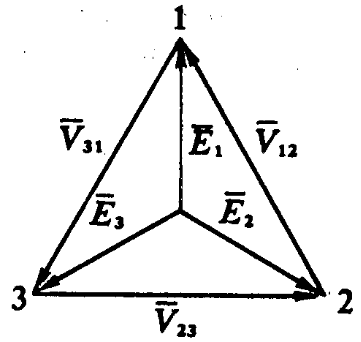

Figura 1: Rappresentazione vettoriale

Un sistema trifase di tensioni si può sempre immaginare realizzato con tre generatori sinusoidali di uguale modulo e sfasati secondo quanto detto in precedenza, collegati secondo due diverse configurazioni:

- Collegamento a stella
  Questo tipo di collegamento rappresentato nella figura seguente è sempre possibile; in questo caso risulta definito un centro stella (nodo comune ai tre generatori di tensione) che viene usato spesso come nodo di riferimento delle tensioni; questo permette anche la realizzazione di un collegamento a quattro fili, tipicamente usato nei sistemi di distribuzione dell'energia elettrica. Le tensioni dei generatori vengono dette stellate o di fase.

- Collegamento a triangolo
  Questo tipo di collegamento può avvenire solo se la terna è pura in quanto in caso contrario si avrebbe un collegamento di generatori di tensione che non soddisfa la LKT. Le tensioni tra i conduttori di linea prendono il nome di tensioni concatenate, e si parla di terna concatenata.

La relazione tra tensioni concatenate e stellate è alquanto immediata, in quanto risulta banalmente:

$$\begin{cases} v_{12}(t) = e_1(t) - e_2(t) \\ v_{23}(t) = e_2(t) - e_3(t) \\ v_{31}(t) = e_3(t) - e_1(t) \end{cases} \tag{3}$$

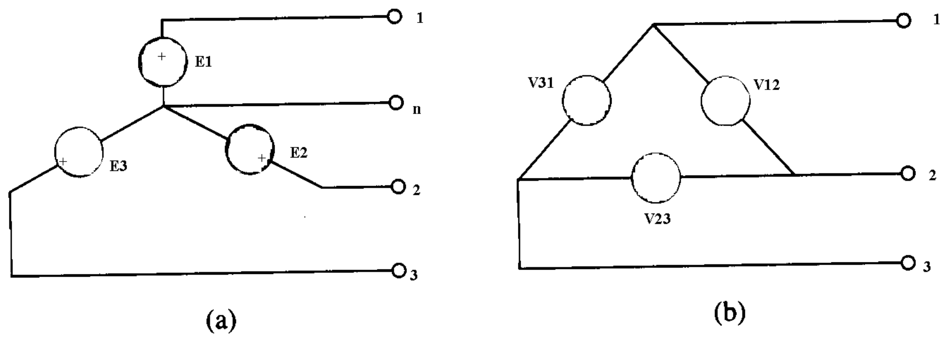

Figura 2: Collegamento a stella e a triangolo

Secondo la rappresentazione vettoriale il triangolo delle tensioni concatenate ha per vertici gli estremi dei vettori rappresentanti le tensioni di fase. Si noti che assegnato un triangolo di tensioni concatenate è possibile immaginare che tali tensioni siano prodotte da una qualsiasi terna di generatori disposti a stella con gli estremi coincidenti con i vertici del triangolo delle tensioni concatenate. Infatti esistono infiniti sistemi di tensioni stellate $e_1(t)$, $e_2(t)$,$e_3(t)$ che danno origine alla stessa terna pura di tensioni concatenate $v_{12}(t)$, $v_{23}(t)$ e $v_{31}(t)$ costituente il triangolo di vertici 1, 2 e 3, cioè che soddisfano il sistema 3, essendo questo degenere dato che la somma delle 3 equazioni è nulla. Le infinite stelle di vettori di vertici 1, 2, 3 si chiamano stelle a vertici comuni e differiscono esclusivamente per la posizione del centro stella nel piano rappresentativo ovvero per una componente omopolare. Nel caso in cui la terna concatenata sia simmetrica è possibile scegliere in maniera univoca la terna stellata E simmetrica che ha per vertici 1, 2 e 3, basta far corrispondere il centro stella al baricentro del triangolo e in questo caso si avrà che $V = \sqrt{3}E$ dove E e V sono rispettivamente il valore efficace della tensione stellata e concatenata. Lo sfasamento tra le concatenate e le stellate sarà pari a $\pi/6$.

Analogamente al sistema dei generatori anche l'utilizzatore può essere un sistema di carichi collegati a stella o a triangolo, come rappresentato nella seguente figura. Si noti a tal proposito che un carico si dirà equilibrato se le tre impendenze che lo costituiscono sono uguali tra loro.

Chiaramente ancora una volta nel caso di collegamento a stella sarà presente un centro stella, che può essere accessibile e quindi collegato (sistema a quattro fili) o meno. Nel caso di carico a triangolo (possibile solo per i sistemi a 3 fili) le singole impedenze saranno percorse da correnti diverse da quelle di linea; tali correnti prendono il nome di correnti di fase. Le relazioni

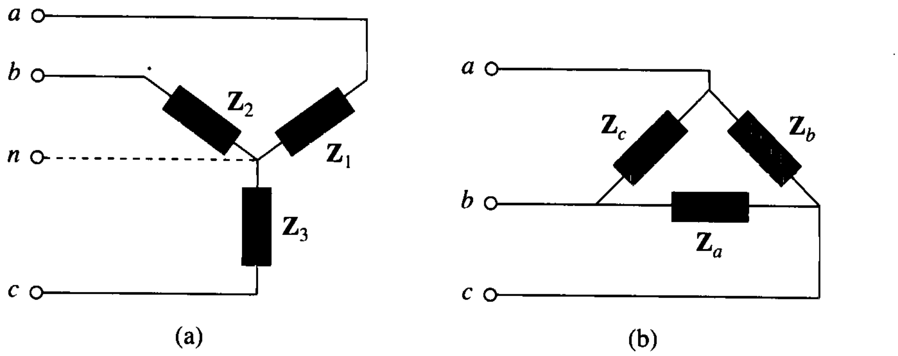

Figura 3: Carico a stella e a triangolo

che passano tra le correnti di linea e le correnti di fase si ricavano facilmente applicando la LKC ai nodi del triangolo di impedenze e sono del tutto simili alle relazioni tra tensioni stellate e concatenate. Infatti basta osservare che le correnti di linea costituiscono una terna pura (equivalente alle tensioni concatenate) e le LKC impongono

$$\begin{cases} i_1(t) = j_{12}(t) - j_{31}(t) \\ i_2(t) = j_{23}(t) - j_{12}(t) \\ i_3(t) = j_{31}(t) - j_{23}(t) \end{cases} \tag{4}$$

Da cui risulta chiara la dualità con il sistema di tensioni stellate-concatenate (fortunatamente questa volta le correnti di fase non devono essere scelte arbitrariamente perché se la rete ammette soluzione unica esse sono univocamente determinate)

Si consideri un generico collegamento tra un sistema di generatori trifase e un sistema di utilizzatori trifase, come rappresentato in figura.

Volendo analizzare la rete trifase a 3 o 4 fili è utile distinguere i seguenti due casi limite: sistema simmetrico ed equilibrato, sistema dissimmetrico e squilibrato.

1 Sistema simmetrico ed equilibrato

Un sistema trifase simmetrico di generatori collegato a 3 impedenze di carico uguali tra loro, come in figura, viene denominato a quattro fili e si distingue dal sistema costituito dai generatori direttamente collegati sul loro carico esclusivamente per il fatto che il conduttore di 'ritorno' dei tre generatori è comune. In queste condizione se con ϕ indichiamo l'angolo di fase dell'impedenza Z e con $I = E/|Z|$ avremo che il sistema delle correnti sui carichi

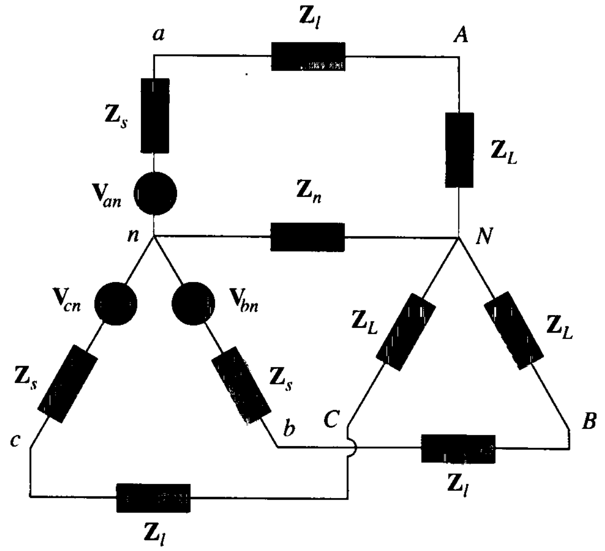

Figura 4: Sistema trifase generico

sarà:

$$\begin{cases} i_1(t) = I \cdot cos(\omega \cdot t - \phi) \\ i_2(t) = I \cdot cos(\omega \cdot t - \phi - 2\pi/3) \\ i_3(t) = I \cdot cos(\omega \cdot t - \phi - 4\pi/3) \end{cases} \tag{5}$$

Si può facilmente verificare, sviluppando le espressioni dei coseni o in termini di rappresentazione vettoriale, che

$$i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = 0. \tag{6}$$

Del resto se si scrive la LKC al nodo comune delle tre impedenze O' si trova che

$$i_0(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) \tag{7}$$

dove $i_0(t)$ è la corrente nel conduttore comune di ritorno con verso uscente da O'. Si conclude quindi che in condizioni di carico equilibrato, la corrente nel conduttore di ritorno è nulla e ne consegue che anche se tale conduttore fosse eliminato i due centri stella (dei generatori e del carico) sarebbero comunque allo stesso potenziale. Si è così trovato un nuovo schema di collegamento che usa solo tre fili: tale sistema viene chiamato usualmente sistema trifase senza conduttore neutro o filo neutro, poiché tale è il nome che si usa per il quarto conduttore finora denominato in questa trattazione conduttore di ritorno. Le espressioni delle correnti scritte sopra suggeriscono la possibilità di considerare disgiuntamente tre diversi circuiti chiamati monofasi equivalenti per l'analisi di ciascuna fase (ovvero di considerarne il primo e sfasare opportunamente le correnti ottenute per ricavare le correnti relative alle altre due fasi).

2 Sistema dissimmetrico ed squilibrato

In questo caso si possono adottare due diverse strategie:

1. Si riconduce la rete tramite trasformazioni serie, parallelo, stella/triangolo e viceversa, al caso stella-stella; a questo punto la rete si analizza mediante le tecniche classiche, ad esempio il potenziale ai nodo, in quanto risulta possibile individuare tutte le tensioni e correnti a partire dalla conoscenza della differenza di potenziale tra i centri stella, ossia si applica il teorema di Millman.

2. Si scompone la terna nelle sue componenti simmetriche e si continua un'analisi alle componenti simmetriche. Se si definisce l'operatore di rotazione nel verso antiorario $\alpha = 2\pi/3$, allora è possibile verificare che una generica terna dissimmetrica $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, $\bar{A}_3$ è univocamente scomponibile in una terna simmetrica diretta, una terna simmetrica inversa e una terna omopolare, cioè sono univocamente determinate le seguenti terne:

    - $\bar{A}_d$, $\alpha^2\bar{A}_d$, $\alpha\bar{A}_d$ terna simmetrica diretta
    - $\bar{A}_i$, $\alpha\bar{A}_i$, $\alpha^2\bar{A}_i$ terna simmetrica inversa
    - $\bar{A}_o$, $\bar{A}_o$, $\bar{A}_o$ terna omopolare

    Queste terne sono tali che:

    $$\begin{cases} \bar{A}_1 = \bar{A}_o + \bar{A}_d + \bar{A}_i \\ \bar{A}_2 = \bar{A}_o + \alpha^2\bar{A}_d + \alpha\bar{A}_i \\ \bar{A}_3 = \bar{A}_o + \alpha\bar{A}_d + \alpha^2\bar{A}_i \end{cases} \tag{8}$$

    Interpretando le precedenti come un sistema di 3 equazioni lineari nelle incognite $\bar{A}_o$, $\bar{A}_d$,$\bar{A}_i$ si trova

    $$\begin{cases} \bar{A}_o = (\bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \bar{A}_3)/3 \\ \bar{A}_d = (\bar{A}_1 + \alpha\bar{A}_2 + \alpha^2\bar{A}_3)/3 \\ \bar{A}_i = (\bar{A}_1 + \alpha^2\bar{A}_2 + \alpha\bar{A}_3)/3 \end{cases} \tag{9}$$

    Questa scomposizione permette lo studio di un qualsiasi sistema trifase riducendolo alla composizione di più sistemi simmetrici.

3 Potenza

Per quanto riguarda la valutazione della potenza che si trasferisce da un generatore ad un utilizzatore trifase possiamo dire che se è nota la struttura interna la potenza istantanea erogata è pari alla somma delle potenze istantanee

$$p(t) = p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) = P_{media} + P_{fluttuante} \tag{10}$$

e in particolare qualora la struttura interna permetta di individuare le tensioni di fase $e(t)$ e correnti istantanee di linea $i(t)$ si ha

$$p(t) = e_1(t)i_1(t) + e_2(t)i_2(t) + e_3(t)i_3(t) \tag{11}$$

In particolare se la terna delle tensioni stellate è simmetrica e se il carico è equilibrato (e ϕ è la sua fase, si ha:

$$\begin{aligned} &p(t) = 2EI[cos(\omega t)cos(\omega t - \phi) + cos(\omega t - 2\pi/3)cos(\omega t - \phi - 2\pi/3)+ \\ &cos(\omega t - 4\pi/3)cos(\omega t - \phi - 4\pi/3)] = \\ &3EIcos(\phi)+ \\ &EI[cos(2\omega t - \phi) + cos(2\omega t - \phi - 2\pi/3) + cos(2\omega t - \phi - 4\pi/3)] \end{aligned} \tag{12}$$

Si noti che come nei sistemi in regime sinusoidale permanente monofase si ha un termine costante (il valore medio) e un termine fluttuante, con la differenza che però questa volta il termine fluttuante è identicamente nullo. La potenza istantanea di un sistema trifase simmetrico ed equilibrato è costante e quindi coincide con la potenza media. Si può concludere dunque che nel caso di terna simmetrica e carico equilibrato la sola potenza che si trasferisce al carico è quella media: $P = 3EIcos(\phi) = \sqrt{3}VIcos(\phi)$, che esprime la potenza in funzione della tensione concatenata e della corrente di linea. Quest'ultima espressione è indipendente dal tipo di collegamento stella o triangolo tra generatore e sistema utilizzatore.

Analogamente ai sistemi monofase si possono definire le potenze attive e reattive e per il teorema di conservazione delle potenze si avrà che le potenze attive e reattive assorbite dall'utilizzatore sono rispettivamente la somma delle potenze attive e reattive sulle singole fasi

$$P_{trifase} = P_1 + P_2 + P_3 \tag{13}$$

$$Q_{trifase} = Q_1 + Q_2 + Q_3 \tag{14}$$

Di conseguenza è possibile definire anche per i sistemi trifase la potenza complessa

$$A_{trifase} = P_{trifase} + jQ_{trifase} \tag{15}$$

Nel caso simmetrico ed equilibrato si avrà:

$$Q_{trifase} = 3EIsin(\phi) = \sqrt{3}VIsin(\phi) \tag{16}$$

$$A_{trifase} = P_{trifase} + jQ_{trifase} = \sqrt{3}VIe^{j\phi} \tag{17}$$

Si è già detto che in generale in un sistema trifase è possibile individuare una infinità terne $\bar{E}_1$, $\bar{E}_2$, $\bar{E}_3$ di stelle a vertici comuni in grado di fornire la stessa terna di tensioni concatenate assegnata, cioè tale che

$$\begin{cases} \bar{V}_{12} = \bar{E}_1 - \bar{E}_2 \\ \bar{V}_{23} = \bar{E}_2 - \bar{E}_3 \\ \bar{V}_{31} = \bar{E}_3 - \bar{E}_1 \end{cases} \tag{18}$$

Si vuole ora discutere il cosiddetto ***teorema di Aron***: *'La potenza assorbita da un carico trifase a tre fili è pari a* $P = E_1I_1cos(\phi_1) + E_2I_2cos(\phi_2) + E_3I_3cos(\phi_3)$[1] *indipendentemente dal potenziale rispetto al quale si valutano le tensioni stellate'*

Sia P la potenza assorbita dal carico trifase a tre fili e che sia stata valutata riferendosi al potenziale del punto O' (centro stella del carico). Si chiami O'' un nodo qualsiasi della rete trifase. Se si indica con $\bar{E}'_f$ il potenziale della singola fase f rispetto il punto O' e con $\bar{E}''_f$ il potenziale della stessa fase f rispetto il punto O'' si ha:

$$\bar{E}''_f = \bar{E}'_f - \bar{V}_{O''O'} \tag{19}$$

Ma allora se valutiamo la seguente grandezza otteniamo la tesi del teorema

$$\begin{aligned} &\Re(\bar{E}''_1\bar{I}_1^* + \bar{E}''_2\bar{I}_2^* + \bar{E}''_3\bar{I}_3^*) = \\ &\Re((\bar{E}'_1 - \bar{V}_{O''O'})\bar{I}_1^* + (\bar{E}'_2 - \bar{V}_{O''O'})\bar{I}_2^* + (\bar{E}'_3 - \bar{V}_{O''O'})\bar{I}_3^*) = \\ &\Re(\bar{E}'_1\bar{I}_1^* + \bar{E}'_2\bar{I}_2^* + \bar{E}'_3\bar{I}_3^*) - \Re(\bar{V}_{O'O''}(\bar{I}_1^* + \bar{I}_2^* + \bar{I}_3^*)) = \\ &= \Re(\bar{E}'_1\bar{I}_1^* + \bar{E}'_2\bar{I}_2^* + \bar{E}'_3\bar{I}_3^*) = P \end{aligned} \tag{20}$$

dato che la somma dei fasori rappresentativi della corrente è nulla a causa dell'assenza del filo di neutro ($\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0$ implica $\bar{I}_1^* + \bar{I}_2^* + \bar{I}_3^* = 0$)[2]. Si noti che non si è fatta alcuna ipotesi sulla terna trifase, che può essere anche dissimmetrica e sul carico che può essere equilibrato o non. E' possibile applicare questo teorema per l'inserzione dei wattmetri in un sistema trifase per la misurazione della potenza attiva erogata dai generatori. Si supponga inizialmente di avere un sistema trifase a quattro fili (cioè con filo di neutro) e quindi in questo caso si ha a che fare con una terna trifase stellata. Non è

[1] $\phi_i = \angle(\bar{E}_i, \bar{I}_i)$
[2] con * indichiamo il complesso coniugato

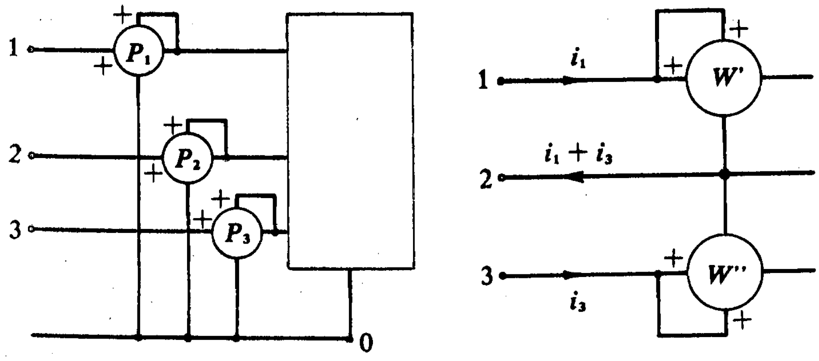

Figura 5: Misura della potenza in una rete trifase

necessario al momento fare alcuna ipotesi sulla simmetria della terna trifase. Si inserisca un wattmetro per ogni linea con i morsetti voltmetrici collegati uno alla linea e l'altro al filo di neutro. Ciascun wattmetro fornisce in questa configurazione la potenza attiva assorbita da ciascun carico e considerando la somma delle tre potenze si trova la potenza complessivamente assorbita dal carico trifase (e questo indipendentemente dalla simmetria della terna e dal fatto che il carico sia equilibrato o meno):

$$W_1 + W_2 + W_3 = E_1 I_1 cos(\phi_1) + E_2 I_2 cos(\phi_2) + E_3 I_3 cos(\phi_3) \qquad (21)$$

Naturalmente se la terna è simmetrica e il carico è equilibrato

$$W_1 = W_2 = W_3 = P/3 \qquad (22)$$

Si consideri ora il caso in cui non ci sia il filo di neutro. Per la misura della potenza ci viene in aiuto il teorema di Aron che giustifca la seguente affermazione:

'La somma algebrica delle indicazioni dei wattmetri è indipendente dal potenziale rispetto al quale si valutano le tensioni stellate ed è uguale alla potenza assorbita dal carico'.

L'applicazione più diretta è che è possibile usare solo due wattmetri, invece che tre, per la misura della potenza attiva in un sistema trifase senza conduttore neutro. Se infatti si collega il punto O'' con il 2° conduttore di linea l'indicazione del secondo wattmetro sarà identicamente nulla. Questo genere di inserzione dei wattmetri si chiama *inserzione Aron.* In questo caso la somma algebrica delle indicazioni dei due wattmetri sfornisce la potenza assorbita dal carico:

$$
\begin{aligned}
&W_1 + W_3 = \Re(\bar{V_{12}}\bar{I_1}^* + \bar{V_{32}}\bar{I_3}^*) = \\
&\Re((\bar{E_1} - \bar{E_2})\bar{I_1}^* + (\bar{E_3} - \bar{E_2})\bar{I_3}^*) = \\
&\Re((\bar{E_1}\bar{I_1}^* + \bar{E_3}\bar{I_3}^* + \bar{E_2}(-\bar{I_1}^* - \bar{I_3}^*)) = \\
&\Re((\bar{E_1}\bar{I_1}^* + \bar{E_3}\bar{I_3}^* + \bar{E_2}I_2*))
\end{aligned} \tag{23}
$$

Si noti infine che nel caso in cui il sistema trifase sia simmetrico ed equilibrato, e solo in questo caso, la differenza tra le due misure è proporzionale alla potenza reattiva Q assorbita dal carico:

$$
\begin{aligned}
&W_3 - W_1 {=} VI[cos(\phi - \pi/6) - cos(\phi + \pi/6)] = \\
&2VIsin(\pi/6)sin(\phi) = Q/\sqrt{3}.
\end{aligned} \tag{24}
$$

4 Confronto tra linea di distribuzione monofase e trifase

Per poter effettuare un primo confronto tra la distrobuzione dell'energia elettrica mediante rete trifase o monofase consideriamo una fissata potenza attiva P trasmessa con un livello di tensione tra i fili di ditribuzione (tensione concatenata tra le fase) V ad una distanza fissata l dal luogo di produzione. Questo comporta che vi sia nel sistema trifase una corrente

$$
\begin{gathered}
P_{trifase} = \sqrt{3}V \cdot I_{trifase} cos(\phi) \\
\Downarrow \\
I_{trifase} = \frac{P}{\sqrt{3}V cos(\phi)}
\end{gathered} \tag{25}
$$

nel caso monofase

$$
\begin{gathered}
P_{monofase} = V \cdot I_{monofase} cos(\phi) \\
\Downarrow \\
I_{monofase} = \frac{P}{V cos(\phi)}
\end{gathered} \tag{26}
$$

e quindi a parità di potenza P

$$
I_{monofase} = \sqrt{3} I_{trifase} \tag{27}
$$

Determiniamo ora le perdite per effetto Joule nel caso trifase e monofase al fine di determinare la sezione Se il volume Vol di materiale conduttore necessario per trasportare una determinata potenza. Quindi a parità di perdite P_{Joule} e di resistività ρ dei conduttori[3] si trova

$$\begin{gathered}
P_{Joule} = P_{Joule}^{trifase} = 3\frac{\rho l}{S_{trifase}} I_{trifase}^2 \\
P_{Joule} = P_{Joule}^{monofase} = 2\frac{\rho l}{S_{monofase}} I_{monofase}^2 \\
\Downarrow \\
S_{monofase} = 2S_{trifase}
\end{gathered} \tag{28}$$

Dunque la sezione del conduttore nel caso trifase risulta la metà di quella necessaria nel caso monofase. Per quanto riguarda il volume invece si trova (ricordando che $S_{monofase} = 2S_{trifase}$):

$$\begin{gathered}
Vol_{trifase} = 3lS_{trifase} \\
Vol_{monofase} = 2lS_{monofase} \\
\Downarrow \\
Vol_{monofase} = \frac{4}{3} Vol_{trifase}
\end{gathered} \tag{29}$$

5 Appendice: trasformazione stella-triangolo

Si considerino i due seguenti carichi a stella e a triangolo. Per comodità si indicheranno con A, B e C i morsetti e con Z_A,Z_B e Z_C le tre impedenze connesse a stella (rispettivamente tra il nodo A, B e C e il centro stella n) e con Z_{AB},Z_{AC} e Z_{BC} le tre impedenze connesse a triangolo (rispettivamente tra le coppie di nodi $A-B$, $A-C$ e $B-C$). Volendo studiare l'equivalenza ai morsetti delle due configurazioni possiamo scrivere le seguenti equazioni:

1. equivalenza ai morsetti $A-B$

$$Z_A + Z_B = Z_{AB}//(Z_{AC} + Z_{BC}) = \frac{Z_{AB}(Z_{AC} + Z_{BC})}{Z_{AB} + Z_{AC} + Z_{BC}} \tag{30}$$

2. equivalenza ai morsetti $A-C$

$$Z_A + Z_C = Z_{AC}//(Z_{AB} + Z_{BC}) = \frac{Z_{AC}(Z_{AB} + Z_{BC})}{Z_{AB} + Z_{AC} + Z_{BC}} \tag{31}$$

[3]si ricordi che si ha la necessità di 3 conduttori per la distribuzione trifase e di 2 per quella monofase

3. equivalenza ai morsetti $B-C$

$$Z_B + Z_C = Z_{BC}//(Z_{AB}+Z_{AC}) = \frac{Z_{BC}(Z_{AB}+Z_{AC})}{Z_{AB}+Z_{AC}+Z_{BC}} \tag{32}$$

Sommando le prime due equazioni e sottraendo la terza si trova

$$\begin{gathered} Z_A + Z_B + Z_A + Z_C - Z_B - Z_C = \tfrac{Z_{AB}Z_{AC}+Z_{AB}Z_{BC}+Z_{AC}Z_{BC}+Z_{AB}Z_{AC}-Z_{AB}Z_{BC}-Z_{AC}Z_{BC}}{Z_{AB}+Z_{AC}+Z_{BC}} \\ \Downarrow \\ 2Z_A = \tfrac{2Z_{AB}Z_{AC}}{Z_{AB}+Z_{AC}+Z_{BC}} \end{gathered} \tag{33}$$

e quindi in definitiva si può scrivere (operando analogamente)

$$\begin{gathered} Z_A = \tfrac{Z_{AB}Z_{AC}}{Z_{AB}+Z_{AC}+Z_{BC}} \\ Z_B = \tfrac{Z_{AB}Z_{BC}}{Z_{AB}+Z_{AC}+Z_{BC}} \\ Z_C = \tfrac{Z_{AC}Z_{BC}}{Z_{AB}+Z_{AC}+Z_{BC}} \end{gathered} \tag{34}$$

La determinazione delle relazioni inverse non è altrettanto semplice in quanto il sistema formato dalle equazioni (30),(31),(32) non è lineare in termini delle incognite Z_{AB}, Z_{AC} e Z_{BC}. Si consideri in questo caso il seguente prodotto:

$$Z_AZ_B + Z_AZ_C + Z_BZ_C = \frac{Z_{AB}^2Z_{AC}Z_{BC} + Z_{AB}Z_{AC}^2Z_{BC} + Z_{AB}Z_{AC}Z_{BC}^2}{(Z_{AB}+Z_{AC}+Z_{BC})^2} \tag{35}$$

ossia

$$Z_AZ_B + Z_AZ_C + Z_BZ_C = \frac{Z_{AB}Z_{AC}Z_{BC}}{Z_{AB}+Z_{AC}+Z_{BC}} \tag{36}$$

che si può anche scrivere ricordando le (30),(31),(32)

$$\begin{gathered} Z_AZ_B + Z_AZ_C + Z_BZ_C = Z_{AB}Z_C \\ Z_AZ_B + Z_AZ_C + Z_BZ_C = Z_{AC}Z_B \\ Z_AZ_B + Z_AZ_C + Z_BZ_C = Z_{BC}Z_A \end{gathered} \tag{37}$$

da cui

$$\begin{gathered} Z_{AB} = \tfrac{Z_AZ_B+Z_AZ_C+Z_BZ_C}{Z_C} \\ Z_{AC} = \tfrac{Z_AZ_B+Z_AZ_C+Z_BZ_C}{Z_B} \\ Z_{BC} = \tfrac{Z_AZ_B+Z_AZ_C+Z_BZ_C}{Z_A} \end{gathered} \tag{38}$$