Introduzione alle reti Trifase

A. Laudani

October 10, 2012

Sistemi Trifase

- Le reti trifase sono reti elettriche utilizzate negli impianti di generazione, trasmissione e distribuzione dell'energia elettrica in regime sinusoidale, essendo preferiti a quelli monofase quando sono in gioco potenze elettriche elevate per i vantaggi economici e tecnologici che comportano.
- Solitamente presentano particolari simmetrie nella topologia, nelle eccitazioni e nei sistemi utilizzatori

Qualche definizione

- Si definisce **terna trifase** un sistema di 3 grandezze sinusoidali isofrequenziali (di pulsazione ω)

$$\begin{cases} s_1(t) = S_{M1} \cdot cos(\omega \cdot t - \varphi_1) \\ s_2(t) = S_{M2} \cdot cos(\omega \cdot t - \varphi_2) \\ s_3(t) = S_{M3} \cdot cos(\omega \cdot t - \varphi_3) \end{cases} \tag{1}$$

- Una terna si dice *simmetrica diretta* (inversa) se le ampiezze sono uguali S_M e lo sfasamento tra ciascuna grandezza e la successiva é pari a $2\pi/3$ (- $2\pi/3$).
- Una terna si dice *simmetrica omopolare* se le tre grandezze sinusoidali che la costituiscono hanno la stessa ampiezze e la stessa fase.

Terna simmetrica diretta e inversa

- Una terna si dice *pura* se la somma delle tre grandezze sinusoidali é identicamente nulla per ogni istante t.
- Risulta che una terna simmetrica diretta o inversa é pura, mentre una terna omopolare non lo é.
- In particolare una terna simmetrica di generatori di tensioni puó essere rappresentata dalle tre tensioni $e_1(t), e_2(t), e_3(t)$

$$\begin{cases} e_1(t) = E_M \cdot cos(\omega \cdot t) \\ e_2(t) = E_M \cdot cos(\omega \cdot t \pm 2\pi/3) \\ e_3(t) = E_M \cdot cos(\omega \cdot t \pm 4\pi/3) \end{cases} \tag{2}$$

e si dirá diretta se nell'equazione precedente vale il segno $-$, inversa se vale il segno $+$.

- Un sistema trifase di tensioni si puó sempre immaginare realizzato con tre generatori sinusoidali di uguale modulo e sfasati secondo quanto detto in precedenza, collegati secondo due diverse configurazioni:

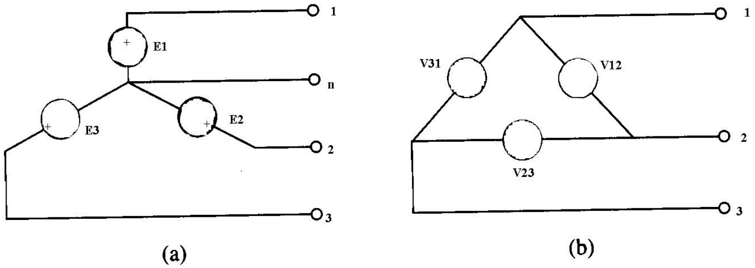

Figure: Collegamento a stella e a triangolo

Collegamento a stella e a triangolo dei generatori

- Collegamento a stella: in questo caso risulta definito un centro stella (nodo comune ai tre generatori di tensione) che viene usato spesso come nodo di riferimento delle tensioni; questo permette anche la realizzazione di un collegamento a quattro fili, tipicamente usato nei sistemi di distribuzione dell'energia elettrica. Le tensioni dei generatori vengono dette stellate o di fase.
- Collegamento a triangolo: puó avvenire solo se la terna é pura, in quanto in caso contrario si avrebbe un collegamento di generatori di tensione che non soddisfa la LKT. Le tensioni tra i conduttori di linea prendono il nome di tensioni concatenate, e si parla di terna concatenata.

Relazione tra tensioni concatenate e stellate

- La relazione tra concatenate e stellate é:

$$\begin{cases} v_{12}(t) = e_1(t) - e_2(t) \\ v_{23}(t) = e_2(t) - e_3(t) \\ v_{31}(t) = e_3(t) - e_1(t) \end{cases} \tag{3}$$

- Queste stesse relazioni possono essere espresse graficamente secondo la rappresentazione vettoriale. In questo caso il triangolo delle tensioni concatenate ha per vertici gli estremi dei vettori rappresentativi delle rispettive tensioni di fase.

Rappresentazione vettoriale

- Nella rappresentazione vettoriale i due sistemi sono descritti dai seguenti due diagrammi:

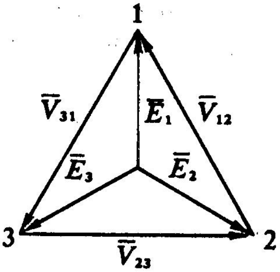

Figure: Rappresentazione vettoriale

- Si noti che assegnato un triangolo di tensioni concatenate esistono infiniti sistemi di tensioni stellate $e_1(t)$,$e_2(t)$,$e_3(t)$ che danno origine alla stessa terna pura di tensioni concatenate $v_{12}(t)$,$v_{23}(t)$ e $v_{31}(t)$ costituente il triangolo di vertici 1, 2 e 3.
- Infatti le tre equazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{12}(t) = e_1(t) - e_2(t) \\ v_{23}(t) = e_2(t) - e_3(t) \\ v_{31}(t) = e_3(t) - e_1(t) \end{array} \right. \tag{4}$$

non sono linearmente indipendenti dato che la loro somma é nulla.

- Le infinite stelle di vettori di vertici 1, 2, 3 si chiamano stelle a vertici comuni e differiscono esclusivamente per la posizione del centro stella nel piano rappresentativo ovvero per una componente omopolare.
- Se la terna concatenata V é simmetrica allora é possibile scegliere la terna stellata E simmetrica che ha per vertici 1, 2 e 3, e centro stella corrispondente al baricentro del triangolo: si avrá che $V = \sqrt{3}E$ dove E e V sono rispettivamente il valore efficace della tensione stellata e concatenata. Lo sfasamento tra le concatenate e le stellate sará pari a $\pi/6$.

Collegamento degli utilizzatori

- Analogamente al sistema dei generatori anche l'utilizzatore puó essere un sistema di utilizzatori (carico) collegati a stella o a triangolo.
- Si ricordi a tal proposito che un carico si dirá equilibrato se le tre impendenze che lo costituiscono sono uguali tra loro.
- Chiaramente ancora una volta nel caso di collegamento a stella sará presente un centro stella, che puó essere accessibile e quindi collegato (sistema a quattro fili) o meno.

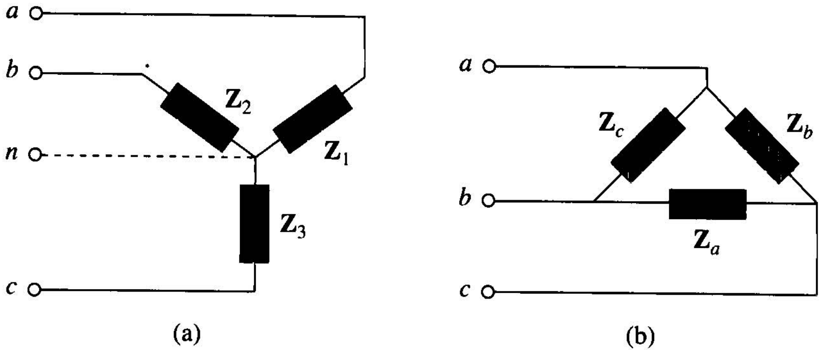

Figure: Carico

- Nel caso di carico a triangolo (possibile solo per i sistemi a 3 fili) le singole impedenze saranno percorse da correnti diverse da quelle di linea;
- Tali correnti prendono il nome di correnti di fase.
- Le relazioni che passano tra le correnti di linea e le correnti di fase si ricavano facilmente applicando la LKC ai nodi del triangolo di impedenze e sono del tutto simili alle relazioni tra tensioni stellate e concatenate.

$$\begin{cases} i_1(t) = j_{12}(t) - j_{31}(t) \\ i_2(t) = j_{23}(t) - j_{12}(t) \\ i_3(t) = j_{31}(t) - j_{23}(t) \end{cases} \tag{5}$$

- Da cui risulta chiara la dualitá con il sistema di tensioni stellate-concatenate (*fortunatamente questa volta le correnti di fase non devono essere scelte arbitrariamente perché se la rete ammette soluzione unica esse sono univocamente determinate*)

- Consideriamo un generico collegamento tra un sistema di generatori trifase e un sistema di utilizzatori trifase, come rappresentato in figura.

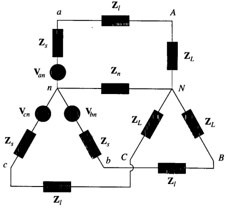

Figure: Collegamento generico a 4 fili

- Volendo analizzare la rete trifase a 3 o 4 fili é utile distinguere i seguenti due casi limite: sistema simmetrico ed equilibrato, sistema dissimmetrico e squilibrato.

- Se si suppone di collegare un sistema trifase simmetrico di generatori a 3 impedenze di carico uguali tra loro come in figura.
- Tale sistema viene denominato a quattro fili e si distingue dal sistema costituito dai generatori direttamente collegati sul loro carico esclusivamente per il fatto che il conduttore di "‘ritorno"’ dei tre generatori é comune.

- In queste condizione se con ϕ indichiamo l'angolo di fase dell'impedenza Z e con $I = E/|Z|$ avremo che il sistema delle correnti sui carichi sará:

$$\begin{cases} i_1(t) = I \cdot cos(\omega \cdot t - \phi) \\ i_2(t) = I \cdot cos(\omega \cdot t - \phi - 2\pi/3) \\ i_3(t) = I \cdot cos(\omega \cdot t - \phi - 4\pi/3) \end{cases} \tag{6}$$

- Si puó facilmente verificare, sviluppando le espressioni dei coseni o in termini di rappresentazione vettoriale, che

$$i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = 0. \tag{7}$$

- Del resto se scriviamo la LKC al nodo comune delle tre impedenze O' troviamo che

$$i_0(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) \tag{8}$$

dove $i_0(t)$ la corrente nel conduttore comune di ritorno con verso uscente da O'. Si conclude quindi che in condizioni di carico equilibrato, la corrente nel conduttore di ritorno é nulla e ne consegue che tale conduttore puó essere eliminato e i due centri stella (dei generatori e del carico) sono comunque allo stesso potenziale.

- Tale sistema viene chiamato usualmente sistema trifase senza conduttore neutro o filo neutro, poiché tale é il nome che si usa per il conduttore di ritorno.
- Le espressioni delle correnti scritte sopra suggeriscono la possibilitá di considerare disgiuntamente tre diversi circuiti chiamati **monofasi equivalenti** per l'analisi di ciascuna fase

- Si riconduce la rete tramite trasformazioni serie, parallelo, stella/triangolo e viceversa, al caso stella-stella e si analizza la rete mediante le tecniche classiche, ad esempio i potenziali ai nodi.

In questo caso si possono adottare due diverse strategie:

- Si riconduce la rete tramite trasformazioni serie, parallelo, stella/triangolo e viceversa, al caso stella-stella e si analizza la rete mediante le tecniche classiche, ad esempio i potenziali ai nodi.
- Si scompone la terna nelle sue componenti simmetriche e si continua un'analisi alle componenti simmetriche. Se si definisce l'operatore di rotazione nel verso antiorario $\alpha = e^{j \cdot \frac{2\pi}{3}}$, allora in base al teorema di Fortesque una generica terna dissimmetrica $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$,$\bar{A}_3$ é univocamente scomponibile in una terna simmetrica diretta, una terna simmetrica inversa e una terna omopolare:
  1. $\bar{A}_d$, $\alpha^2\bar{A}_d$, $\alpha\bar{A}_d$ terna simmetrica diretta
  2. $\bar{A}_i$, $\alpha\bar{A}_i$, $\alpha^2\bar{A}_i$ terna simmetrica inversa
  3. $\bar{A}_o$, $\bar{A}_o$, $\bar{A}_o$ terna omopolare

Queste terne sono tali che:

$$\begin{cases} \bar{A}_1 = \bar{A}_o + \bar{A}_d + \bar{A}_i \\ \bar{A}_2 = \bar{A}_o + \alpha^2 \bar{A}_d + \alpha \bar{A}_i \\ \bar{A}_3 = \bar{A}_o + \alpha \bar{A}_d + \alpha^2 \bar{A}_i \end{cases} \tag{9}$$

Interpretando le precedenti come un sistema di 3 equazioni lineari nelle incognite $\bar{A}_o$, $\bar{A}_d$,$\bar{A}_i$ si trova

$$\begin{cases} \bar{A}_o = (\bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \bar{A}_3)/3 \\ \bar{A}_d = (\bar{A}_1 + \alpha \bar{A}_2 + \alpha^2 \bar{A}_3)/3 \\ \bar{A}_i = (\bar{A}_1 + \alpha^2 \bar{A}_2 + \alpha \bar{A}_3)/3 \end{cases} \tag{10}$$

Questa scomposizione permette lo studio di un qualsiasi sistema trifase non simmetrico riducendolo alla composizione di piú sistemi simmetrici.

Potenza nei sistemi trifase

La potenza istantanea che si trasferisce da un generatore trifase ad un utilizzatore trifase é pari alla somma delle potenze istantanee erogate da ciascun generatore monofase componente la terna

$$p(t) = p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) = P_{media} + P_{fluttuante} \tag{11}$$

e in particolare qualora la struttura interna permetta di individuare le tensioni di fase $e_k(t)$ e correnti istantanee di linea $i_k(t)$ avremo

$$p(t) = e_1(t) \cdot i_1(t) + e_2(t) \cdot i_2(t) + e_3(t) \cdot i_3(t) \tag{12}$$

In particolare se la terna delle tensioni stellate é simmetrica e se il carico é equilibrato si ha:

$$\begin{aligned}
&p(t) = 2EI[cos(\omega t)cos(\omega t - \phi) \\
&+cos(\omega t - 2\pi/3)cos(\omega t - \phi - 2\pi/3)+ \\
&cos(\omega t - 4\pi/3)cos(\omega t - \phi - 4\pi/3)] = \\
&3EIcos(\phi) + \frac{1}{2}EI[cos(2\omega t - \phi)+ \\
&cos(2\omega t - \phi - 2\pi/3) + cos(2\omega t - \phi - 4\pi/3)]
\end{aligned} \tag{13}$$

Notiamo che il termine fluttuante identicamente nullo. La potenza istantanea di un sistema trifase simmetrico ed equilibrato é costante e quindi coincide con la potenza media $P = 3EIcos(\phi) = \sqrt{3}VIcos(\phi)$, che esprime la potenza in funzione della tensione concatenata e della corrente di linea. Quest'ultima espressione é del tutto generale ed é indipendente dal tipo di collegamento stella o triangolo tra generatore e sistema utilizzatore.

Analogamente ai sistemi monofase si avrá che le potenze attiva e reattiva assorbite dall'utilizzatore sono rispettivamente la somma delle potenze attive e reattive delle singole fasi

$$P_{trifase} = P_1 + P_2 + P_3 \tag{14}$$

$$Q_{trifase} = Q_1 + Q_2 + Q_3 \tag{15}$$

Di conseguenza é possibile definire anche per i sistemi trifase la potenza complessa

$$A_{trifase} = P_{trifase} + jQ_{trifase} \tag{16}$$

Analogamente nel caso simmetrico ed equilibrato si avr pure:

$$Q_{trifase} = 3EIsin(\phi) = \sqrt{3}VIsin(\phi) \tag{17}$$

$$A_{trifase} = P_{trifase} + jQ_{trifase} = \sqrt{3}VIe^{j*phi} \tag{18}$$

Vogliamo ora discutere il cosiddetto **teorema di Aron**:
"'La potenza assorbita da un carico trifase a tre fili é pari a $P = E_1 I_1 cos(\phi_1) + E_2 I_2 cos(\phi_2) + E_3 I_3 cos(\phi_3)$ *indipendentemente dal potenziale rispetto al quale si valutano le tensioni stellate"'*

Supponiamo che P sia la potenza assorbita dal carico trifase a tre fili e che sia stata valutata riferendosi al potenziale del punto O' (centro stella del carico).
Chiamiamo O'' un punto qualsiasi della rete trifase.
Se indichiamo con E'_f il potenziale della singola fase f rispetto il punto O' e con E''_f il potenziale della singola fase f rispetto il punto O'' avremo:

$$E''_f = E'_f - V_{O'O''} \tag{19}$$

Ma allora se valutiamo la seguente grandezza otteniamo la tesi del teorema

$$\begin{aligned}
&\Re(\bar{E}_1''\bar{I}_1^* + \bar{E}_2''\bar{I}_2^* + \bar{E}_3''\bar{I}_3^*) = \\
&\Re((\bar{E}_1' - \bar{V}_{O'O''})\bar{I}_1^* + (\bar{E}_2' - \bar{V}_{O'O''})\bar{I}_2^* + (\bar{E}_3' - \bar{V}_{O'O''})\bar{I}_3^*) = \\
&\Re(\bar{E}_1'\bar{I}_1^* + \bar{E}_2'\bar{I}_2^* + \bar{E}_3'\bar{I}_3^*) + \Re(\bar{V}_{O'O''}(\bar{I}_1^* + \bar{I}_2^* + \bar{I}_3^*)) = \\
&= \Re(\bar{E}_1'\bar{I}_1^* + \bar{E}_2'\bar{I}_2^* + \bar{E}_3'\bar{I}_3^*) = P
\end{aligned} \tag{20}$$

dato che $\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0$ nulla a causa dell'assenza del filo di neutro.
Si noti che non si é fatta alcuna ipotesi sulla terna trifase, che puó essere anche dissimmetrica e sul carico che pu essere equilibrato o non.

Inserimento wattmetri

Supponiamo di avere un sistema trifase a quattro fili.
Inseriamo un wattmetro per ogni linea con i morsetti voltmetrici collegati uno alla linea e l'altro al filo di neutro. Considerando la somma delle tre potenze misurate dai wattmetri si trova la potenza complessivamente assorbita dal carico trifase (e questo indipendentemente dalla simmetria della terna e dal fatto che il carico sia equilibrato o meno):

$$W_1 + W_2 + W_3 = E_1 I_1 cos(\phi_1) + E_2 I_2 cos(\phi_2) + E_3 I_3 cos(\phi_3) \qquad (21)$$

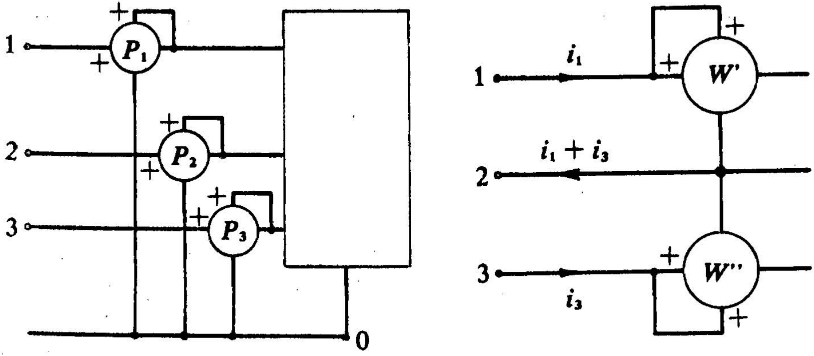

Figure: Misura della potenza in una rete trifase

Naturalmente se la terna é simmetrica e il carico é equilibrato

$$W_1 = W_2 = W_3 = P/3 \tag{22}$$

Nel caso di un sistema trifase a tre fili (senza neutro) ci viene in aiuto il teorema di Aron che giustifica la seguente affermazione:
"'La somma algebrica delle indicazioni dei wattmetri é indipendente dal potenziale rispetto al quale si valutano le tensioni stellate ed é uguale alla potenza assorbita dal carico"'.
L'applicazione piú diretta é che é possibile usare solo due wattmetri, invece che tre, per la misura della potenza attiva in un sistema trifase senza conduttore neutro collegando il punto O" con il 2 conduttore di linea.

Questo genere di inserzione dei wattmetri si chiama *inserzione Aron*.

$$\begin{aligned}
&W_1 + W_3 = \Re(\bar{V}_{12}\bar{I_1}^* + \bar{V}_{32}\bar{I_3}^*) = \\
&\Re((\bar{E}_1 - \bar{E}_2)\bar{I_1}^* + (\bar{E}_3 - \bar{E}_2)\bar{I_3}^*) = \\
&\Re((\bar{E}_1\bar{I_1}^* + \bar{E}_3\bar{I_3}^* + \bar{E}_2(-\bar{I_1}^* - \bar{I_3}^*)) = \\
&\Re((\bar{E}_1\bar{I_1}^* + \bar{E}_3\bar{I_3}^* + \bar{E}_2 I_2^*))
\end{aligned} \tag{23}$$

la somma algebrica delle indicazioni dei due wattmetri sfornisce la potenza assorbita dal carico

Inoltre se il sistema trifase é simmetrico ed equilibrato la differenza tra le due misure é proporzionale alla potenza reattiva Q assorbita dal carico:

$$W_3 - W_1 = VI[cos(\phi - \pi/6) - cos(\phi + \pi/6)] = \\ 2VIsin(\pi/6)sin(\phi) = Q/\sqrt{3}. \tag{24}$$

Confronto tra linea di distribuzione monofase e trifase

Per poter effettuare un primo confronto tra la distribuzione dell'energia elettrica mediante rete trifase o monofase consideriamo una fissata potenza attiva P trasmessa con un livello di tensione tra i fili di ditribuzione (tensione concatenata tra le fase) V ad una distanza fissata l dal luogo di produzione. Questo confronto avviene in termini di:

- Corrente
- Sezione
- Volume

Questo comporta che vi sia nel sistema trifase una corrente

$$P_{trifase} = \sqrt{3}V \cdot I_{trifase} cos(\phi)$$
$$\Downarrow \tag{25}$$
$$I_{trifase} = \frac{P}{\sqrt{3}Vcos(\phi)}$$

nel caso monofase

$$P_{monofase} = V \cdot I_{monofase} cos(\phi)$$
$$\Downarrow \tag{26}$$
$$I_{monofase} = \frac{P}{Vcos(\phi)}$$

e quindi a parit di potenza P

$$I_{monofase} = \sqrt{3} I_{trifase} \tag{27}$$

Determiniamo ora le perdite per effetto Joule nel caso trifase e monofase al fine di determinare la sezione Se il volume Vol di materiale conduttore necessario per trasportare una determinata potenza. A parit di perdite P_{Joule} e di resistivitá ρ dei conduttori[1] si trova

$$P_{Joule} = P_{Joule}^{trifase} = 3\frac{\rho l}{S_{trifase}} I_{trifase}^2$$

$$P_{Joule} = P_{Joule}^{monofase} = 2\frac{\rho l}{S_{monofase}} I_{monofase}^2 \tag{28}$$

$$\Downarrow$$

$$S_{monofase} = 2S_{trifase}$$

[1] si ricordi 3 conduttori per i trifase e 2 per i monofase

Per quanto riguarda il volume invece si trova (ricordando che $S_{monofase} = 2S_{trifase}$):

$$\begin{gathered} Vol_{trifase} = 3lS_{trifase} \\ Vol_{monofase} = 2lS_{monofase} \\ \Downarrow \\ Vol_{monofase} = \frac{4}{3} Vol_{trifase} \end{gathered} \tag{29}$$

Trasformazioni stella-triangolo

Si considerino i due seguenti carichi a stella e a triangolo.
Indichiamo con a, b e c i morsetti e con Z_a,Z_b e Z_c le tre impedenze connesse a stella (rispettivamente tra il nodo a, b e c e il centro stella n) e con Z_{ab},Z_{ac} e Z_{bc} le tre impedenze connesse a triangolo (rispettivamente tra le coppie di nodi $a - b$, $a - c$ e $b - c$).

Volendo studiare l'equivalenza ai morsetti delle due configurazioni possiamo scrivere le seguenti equazioni:

1. equivalenza ai morsetti $a - b$

$$Z_a + Z_b = Z_{ab}//(Z_{ac} + Z_{bc}) = \frac{Z_{ab}(Z_{ac} + Z_{bc})}{Z_{ab} + Z_{ac} + Z_{bc}} \tag{30}$$

2. equivalenza ai morsetti $a - c$

$$Z_a + Z_c = Z_{ac}//(Z_{ab} + Z_{bc}) = \frac{Z_{ac}(Z_{ab} + Z_{bc})}{Z_{ab} + Z_{ac} + Z_{bc}} \tag{31}$$

3. equivalenza ai morsetti $B - C$

$$Z_b + Z_c = Z_{bc}//(Z_{ab} + Z_{ac}) = \frac{Z_{bc}(Z_{ab} + Z_{ac})}{Z_{ab} + Z_{ac} + Z_{bc}} \tag{32}$$

Sommando le prime due equazioni e sottraendo la terza si trova

$$
\begin{gathered}
Z_a + Z_b + Z_a + Z_c - Z_b - Z_c = \\
= \frac{Z_{ab}Z_{ac} + Z_{ab}Z_{bc} + Z_{ac}Z_{bc} + Z_{ab}Z_{ac} - Z_{ab}Z_{bc} - Z_{ac}Z_{bc}}{Z_{ab} + Z_{ac} + Z_{bc}} \\
\Downarrow \\
2Z_a = \frac{2Z_{ab}Z_{ac}}{Z_{ab} + Z_{ac} + Z_{bc}}
\end{gathered}
\tag{33}
$$

e quindi in definitiva si pu scrivere (operando analogamente)

$$
\begin{aligned}
Z_a &= \frac{Z_{ab}Z_{ac}}{Z_{ab}+Z_{ac}+Z_{bc}} \\
Z_b &= \frac{Z_{ab}Z_{bc}}{Z_{ab}+Z_{ac}+Z_{bc}} \\
Z_c &= \frac{Z_{ac}Z_{bc}}{Z_{ab}+Z_{ac}+Z_{bc}}
\end{aligned}
\tag{34}
$$

La determinazione delle relazioni inverse non altrettanto semplice in quanto il sistema formato dalle equazioni (30),(31),(32) non lineare in termini delle incognite Z_{ab}, Z_{ac} e Z_{bc}. Si consideri in questo caso il seguente prodotto:

$$Z_a Z_b + Z_a Z_c + Z_b Z_c = \frac{Z_{ab}^2 Z_{ac} Z_{bc} + Z_{ab} Z_{ac}^2 Z_{bc} + Z_{ab} Z_{ac} Z_{bc}^2}{(Z_{ab} + Z_{ac} + Z_{bc})^2} \tag{35}$$

ossia

$$Z_a Z_b + Z_a Z_c + Z_b Z_c = \frac{Z_{ab} Z_{ac} Z_{bc}}{Z_{ab} + Z_{ac} + Z_{bc}} \tag{36}$$

la precedente relazione si pu anche scrivere ricordando le (30),(31),(32)

$$Z_a Z_b + Z_a Z_c + Z_b Z_c = Z_{ab} Z_c$$

$$Z_a Z_b + Z_a Z_c + Z_b Z_c = Z_{ac} Z_b \tag{37}$$

$$Z_a Z_b + Z_a Z_c + Z_b Z_c = Z_{bc} Z_a$$

da cui

$$
\begin{aligned}
Z_{ab} &= \frac{Z_a Z_b + Z_a Z_c + Z_b Z_c}{Z_c} \\
Z_{ac} &= \frac{Z_a Z_b + Z_a Z_c + Z_b Z_c}{Z_b} \\
Z_{bc} &= \frac{Z_a Z_b + Z_a Z_c + Z_b Z_c}{Z_a}
\end{aligned}
\tag{38}
$$