Sintesi di Funzioni di Trasferimento mediante le equazioni di stato

A. Laudani

January 24, 2017

Da una funzione di trasferimento alle equazioni di stato

Un approccio alternativo nella sintesi di funzioni di trasferimento mediante reti RC-Attive si basa sulla rappresentazione della funzione di trasferimento stessa in termini di equazioni di stato. Noi solitamente siamo abituati a ragionare in maniera diretta, ossia dal circuito ricaviamo le equazioni di stato, ma tramite opportune forme "canoniche" di rappresentazione è possibile fare il contrario. Eímportante notare che quanto faremo di seguito è abbastanza generale anche se il suo uso si limita solitamente alla sintesi di celle di ordine due. Partiamo da una funzione di trasferimento generica (sotto l'ipotesi che sia di grado minimo, ossia siano state fatte eventuali semplificazioni tra poli e zeri):

$$F(s) = \frac{c_0 s^m + c_1 s^{m-1} + c_2 s^{m-2} + \cdots + c_{m-1} s + c_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} \qquad (1)$$

Supponiamo adesso di considerare un vettore di stato, nella variabile s di Laplace, $X(s) = [X_1(s), X_2(s), \cdots, X_n(s)]$ e supponiamo di scegliere le variabili di stato in maniera tale che la relazione che li lega sia data dalla seguente matrice di stato:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Supponiamo inoltre che il vettore che lega gli ingressi allo stato B ed il vettore che lega lo stato all'uscita C (ipotizzando pure che al massimo m sia pari a n-1) siano scelti come segue:

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} c_{n-1} & c_{n-2} & \dots & c_1 & c_0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

É facile verificare che $F(s)$ risulta uguale a $C(sI - A)^{-1}B$. (In "Teoria dei Sistemi" tale rappresentazione di stato si chiama forma canonica di controllo).

Infatti elaborando l'equazione $sX(s) = AX(s) + BU(s)$, si trova:

$$
\begin{aligned}
sX_1(s) &= X_2(s) && (4)\\
sX_2(s) &= X_3(s) && (5)\\
&\vdots && (6)\\
sX_{n-1}(s) &= X_n(s) && (7)\\
sX_n(s) &= -a_nX_1(s) - a_{n-1}X_2(s) - \cdots - a_2X_{n-1}(s) - a_1X_n(s) + U(s) && (8)
\end{aligned}
$$

da cui

$$
s^nX_1(s) = -a_nX_1(s) - a_{n-1}sX_1(s) - \cdots - a_1s^{n-1}X_1(s) + U(s) \quad (9)
$$

A questo punto è facile trovare che:

$$\frac{X_1(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1}s + a_n} \tag{10}$$

e quindi anche

$$X_2(s) = sX_1(s) = \frac{sU(s)}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1}s + a_n} \tag{11}$$

$$X_3(s) = sX_2(s) = s^2 X_1(s) = \tag{12}$$

$$= \frac{s^2 U(s)}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1}s + a_n} \tag{13}$$

$$\vdots \tag{14}$$

$$X_n(s) = sX_{n-1} = s^{n-1} X_1(s) \tag{15}$$

$$= \frac{s^{n-1} U(s)}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1}s + a_n} \tag{16}$$

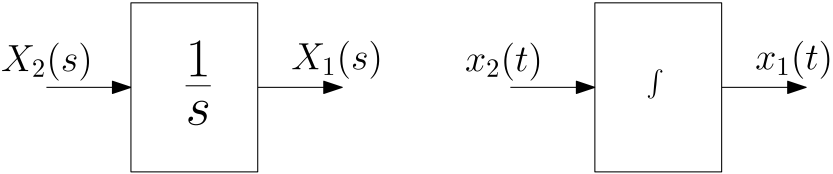
Ed essendo $Y(s) = C \cdot X$ troviamo

$$Y(s) = \begin{bmatrix} c_{n-1} & \dots & c_1 & c_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{s^n+a_1 s^{n-1}+a_2 s^{n-2}+\dots+a_{n-1}s+a_n} \\ \frac{s}{s^n+a_1 s^{n-1}+a_2 s^{n-2}+\dots+a_{n-1}s+a_n} \\ \frac{s}{s^n+a_1 s^{n-1}+a_2 s^{n-2}+\dots+a_{n-1}s+a_n} \\ \vdots \\ \frac{s^{n-1}}{s^n+a_1 s^{n-1}+a_2 s^{n-2}+\dots+a_{n-1}s+a_n} \end{bmatrix} U(s) \tag{17}$$

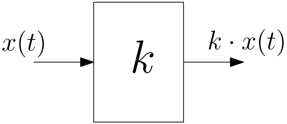
e quindi

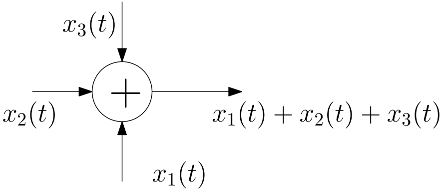
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = F(s) = \frac{c_0 s^{n-1} + c_1 s^{n-2} + c_2 s^{n-3} + \dots + c_{n-2}s + c_{n-1}}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1}s + a_n} \tag{18}$$

Certo le relazioni scritte così sembrano significare poco in termini circuitali, ma ... ad esempio $sX_1(s) = X_2(s)$ significa anche che $X_1(s) = \frac{1}{s}X_2(s)$, ma ricordandoci del significato di $\frac{1}{s}$, ossia l'operazione di integrazione troviamo che $X_1(t)$ si ottiene integrando $X_2(t)$, e così via. Ossia ragionando in termini di schemi a blocchi, ad esempio:



Ed i seguenti blocchi (guadagno e sommatore):





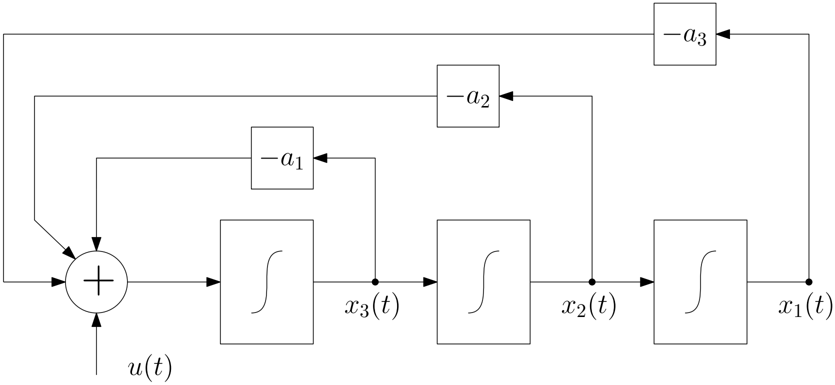
Si può rappresentare agevolmente la funzione di trasferimento mediante questi blocchi e le equazioni di stato. Ad esempio supponiamo di considerare la seguente funzione di trasferimento:

$$F(s) = \frac{c_0 s^2 + c_1 s + c_2}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} \tag{19}$$

Il sistema di stato sarà:

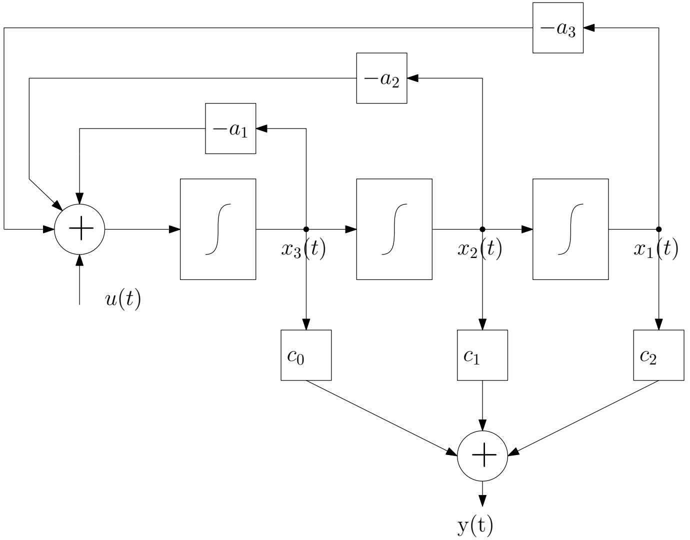
$$sX_1(s) = X_2(s) \tag{20}$$
$$sX_2(s) = X_3(s) \tag{21}$$
$$sX_3(s) = -a_3X_1(s) - a_2X_2(s) - a_1X_3(s) + U(s) \tag{22}$$

e quindi $x_1(t)$ sarà l'integrale di $x_2(t)$ che a sua volta sarà l'integrale di $x_3(t)$, che a sua volta sarà l'integrale della somma tra $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ e $u(t)$, pesata da $-a_3$, $-a_2$, $-a_1$ e 1. Da cui lo schema a blocchi:



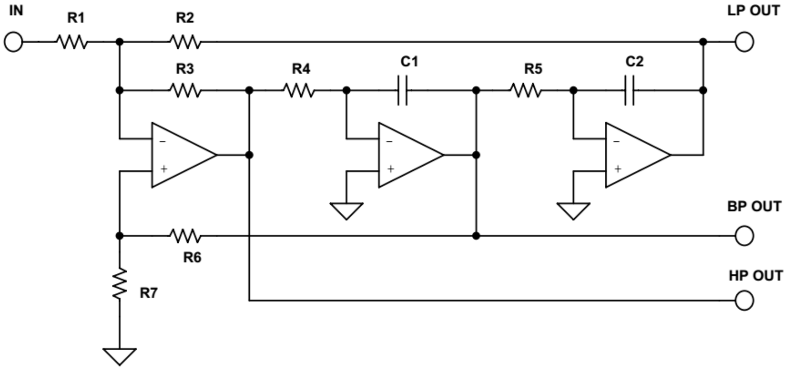
$-a_3$
$-a_2$
$-a_1$
$x_3(t)$
$x_2(t)$
$x_1(t)$
$u(t)$

Basta aggiungere l'uscita y che è la combinazione di x_1, x_2 e x_3 ed è fatta.



- Chiaramente la realizzazione dei blocchi sommatore, integratore e guadagno (invertente o meno) può essere affidata senza problemi ai classici schemi degli amplificatori operazionali.
- L'unico inconveniente è che, senza opportune osservazioni, si rischia di adoperare più operazionali del necessario.
- Vale la pena di ricordare che, in ogni caso, tale schema non permetterà mai di adoperare un unico operazionale per una funzione del secondo ordine, come ad esempio accade per la cella STAR, ma presenta comunque dei vantaggi in termine di facilità di tuning delle caratteristiche filtranti.

Una classica realizzazione per una cella biquadratica filtrante è la seguente (con possibilità di ottenere filtri passa alto (HP), passa basso (LP) e passa banda (BP).



Come esercizio ... Si scrivano le funzioni di trasferimento per l'HP, il LP e il BP in funzione dei componenti circuitali supponendo ideale il comportamento dell'A.O.