

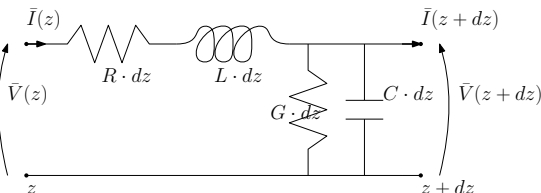
Linee di trasmissione: Equivalenti in termini di doppi bipoli e considerazioni varie

A. Laudani

November 23, 2016

Soluzione generale dell'equazione dei telegrafisti

Una linea di trasmissione, caratterizzata dai parametri primari (R , L , C e G) alla pulsazione ω , rappresentata schematicamente nel tratto $z - z + dz$ dalla figura seguente,



è caratterizzabile, attraverso l'uso delle grandezze fasoriali, dalle cosiddette equazioni dei telegrafisti

$$\begin{cases} \frac{d^2 \bar{V}(z)}{dz^2} = (R + j\omega L) \cdot (G + j\omega C) \bar{V}(z) \\ \frac{d^2 \bar{I}(z)}{dz^2} = (R + j\omega L) \cdot (G + j\omega C) \bar{I}(z) \end{cases} \quad (1)$$

Dette $Z = R + j\omega L$ e $Y = G + j\omega C$, la grandezza $\gamma^2 = Z \cdot Y$, rappresenta il quadrato della costante di propagazione della linea, ed è un numero complesso esprimibile in termini di una parte reale α ed una parte immaginaria β . È semplice ricavare la soluzione generale dell'equazione dei telegrafisti, ossia:

$$\begin{cases} \bar{V}(z) = \bar{V}^+ e^{-\gamma z} + \bar{V}^- e^{\gamma z} \\ \bar{I}(z) = \bar{I}^+ e^{-\gamma z} + \bar{I}^- e^{\gamma z} \end{cases} \quad (2)$$

dove l'apice \pm serve a distinguere la cosiddetta onda progressiva (o diretta) dall'onda retrograda (o riflessa). Del resto le grandezze \bar{V}^+ , \bar{V}^- , \bar{I}^+ e \bar{I}^- non sono indipendenti tra di loro, ma risultano legate dall'impedenza caratteristica della linea $Z_C = \sqrt{\frac{Z}{Y}}$ (o dall'ammettenza $Y_C = 1/Z_C$).

infatti:

$$\frac{d\bar{I}(z)}{dz} = -(G + j\omega C)\bar{V}(z) \quad (3)$$

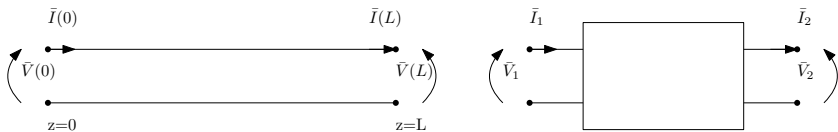
e quindi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} [\bar{I}^+ e^{-\gamma z} + \bar{I}^- e^{\gamma z}] &= \\ [-\gamma \bar{I}^+ e^{-\gamma z} + \gamma \bar{I}^- e^{\gamma z}] &= \\ -Y [\bar{V}^+ e^{-\gamma z} + \bar{V}^- e^{\gamma z}] & \end{aligned} \quad (4)$$

da cui $\bar{I}^+ = Y_C \bar{V}^+$ e $\bar{I}^- = -Y_C \bar{V}^-$ e quindi

$$\begin{cases} \bar{V}(z) = \bar{V}^+ e^{-\gamma z} + \bar{V}^- e^{\gamma z} \\ \bar{I}(z) = Y_C \bar{V}^+ e^{-\gamma z} - Y_C \bar{V}^- e^{\gamma z} \end{cases} \quad (5)$$

Consideriamo ora la linea in termini di un elemento a due porte, come in figura



Abbiamo la possibilità di esprimere le grandezze \bar{V}^+ e \bar{V}^- in funzione delle condizioni all'inizio della linea, ossia a $z = 0$ (o anche alla porta "1"), o alla fine della linea, ossia a $z = L$ (o anche alla porta "2").

Imporre le condizioni a $z = 0$ significa

$$\begin{cases} \bar{V}(0) = \bar{V}^+ e^{-\gamma \cdot 0} + \bar{V}^- e^{\gamma \cdot 0} = \bar{V}^+ + \bar{V}^- \\ \bar{I}(0) = Y_C \bar{V}^+ e^{-\gamma \cdot 0} - Y_C \bar{V}^- e^{\gamma \cdot 0} = Y_C \bar{V}^+ - Y_C \bar{V}^- \end{cases} \quad (6)$$

da cui (ricordiamo $Y_C = 1/Z_C$)

$$\begin{cases} \bar{V}^+ = \frac{\bar{V}(0) + Z_C \bar{I}(0)}{2} \\ \bar{V}^- = \frac{\bar{V}(0) - Z_C \bar{I}(0)}{2} \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \bar{V}(z) = \frac{\bar{V}(0) + Z_C \bar{I}(0)}{2} e^{-\gamma z} + \frac{\bar{V}(0) - Z_C \bar{I}(0)}{2} e^{\gamma z} \\ \bar{I}(z) = Y_C \frac{\bar{V}(0) + Z_C \bar{I}(0)}{2} e^{-\gamma z} - Y_C \frac{\bar{V}(0) - Z_C \bar{I}(0)}{2} e^{\gamma z} \end{cases} \quad (8)$$

Ordiniamo adesso i termini mettendo in evidenza $\bar{V}(0)$ e $\bar{I}(0)$:

$$\begin{cases} \bar{V}(z) = \bar{V}(0) \frac{e^{-\gamma z} + e^{\gamma z}}{2} - Z_C \bar{I}(0) \frac{e^{\gamma z} - e^{-\gamma z}}{2} \\ \bar{I}(z) = -Y_C \bar{V}(0) \frac{e^{\gamma z} - e^{-\gamma z}}{2} + \bar{I}(0) \frac{e^{-\gamma z} + e^{\gamma z}}{2} \end{cases} \quad (9)$$

e ricordando le definizioni di $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ (coseno iperbolico) e $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (seno iperbolico) abbiamo:

$$\begin{cases} \bar{V}(z) = \bar{V}(0) \cosh(\gamma z) - Z_C \bar{I}(0) \sinh(\gamma z) \\ \bar{I}(z) = -Y_C \bar{V}(0) \sinh(\gamma z) + \bar{I}(0) \cosh(\gamma z) \end{cases} \quad (10)$$

Chiaramente per $z = L$ si ha

$$\begin{cases} \bar{V}(L) = \bar{V}(0)\cosh(\gamma L) - Z_C\bar{I}(0)\sinh(\gamma L) \\ \bar{I}(L) = -Y_C\bar{V}(0)\sinh(\gamma L) + \bar{I}(0)\cosh(\gamma L) \end{cases} \quad (11)$$

ma, ricordando l'equivalenza con la rete due porte, abbiamo che $\bar{V}_1 = \bar{V}(0)$, $\bar{V}_2 = \bar{V}(L)$, $\bar{I}_1 = \bar{I}(0)$ e $\bar{I}_2 = \bar{I}(L)$ da cui

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_2 \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma L) & -Z_C\sinh(\gamma L) \\ -Y_C\sinh(\gamma L) & \cosh(\gamma L) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{I}_1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

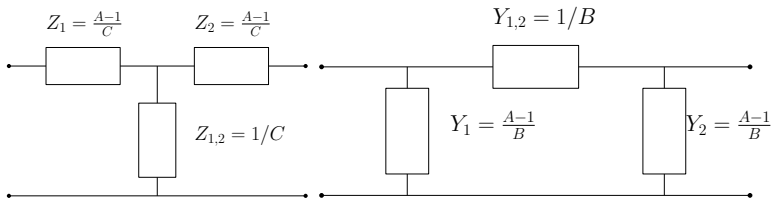
dove la matrice quadrata non è altro che la matrice di trasmissione dalla porta uno alla porta due.

La sua inversa è la matrice $[T]$ di trasmissione tradizionalmente da noi usata:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma L) & -Z_C \sinh(\gamma L) \\ -Y_C \sinh(\gamma L) & \cosh(\gamma L) \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma L) & Z_C \sinh(\gamma L) \\ Y_C \sinh(\gamma L) & \cosh(\gamma L) \end{bmatrix} \quad (13)$$

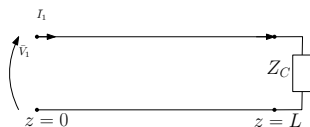
Una linea di trasmissione di lunghezza L equivale, quindi, ad un doppio bipolo passivo con matrice $[T]$ con coefficienti $A = D = \cosh(\gamma L)$, $B = Z_C \sinh(\gamma L)$ e $C = Y_C \sinh(\gamma L)$

Del resto una tale matrice può anche essere realizzata tramite una rete a T o a π come mostrato nei circuiti in figura.



Tali circuiti equivalenti possono essere talvolta usati al posto della teoria delle linee di trasmissione per studiare cosa succede agli estremi della linea stessa. Qualora, invece, interessi il comportamento lungo la linea, è bene affidarsi alle altre espressioni precedentemente viste.

Linea chiusa sull'impedenza caratteristica



Come prima cosa bisogna fare qualche considerazione sull'impedenza caratteristica. Ricordiamo che

$$Z_C = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = \Re(Z_C) + j\Im(Z_C) = R_C + jX_C \quad (14)$$

Nel caso ideale di linea senza perdite ($R = 0$, $G = 0$) abbiamo $Z_C = \sqrt{L/C}$ ossia un'impedenza puramente resistiva. Notate "linea senza perdite, ma impedenza caratteristica puramente resistiva." Un'interessante discussione su tale condizione si trova nelle "Lezioni di Fisica" di Richard Feynman. Cosa accade se alla fine della mia linea pongo come carico un'impedenza pari alla impedenza caratteristica?

Basta ricordare che

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma L) & Z_C \sinh(\gamma L) \\ Y_C \sinh(\gamma L) & \cosh(\gamma L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_2 \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

e che $\bar{V}_2 = Z_C \cdot \bar{I}_2$ per ricavare, facendo il rapporto tra \bar{V}_1 e \bar{I}_1 , l'impedenza equivalente vista all'ingresso della linea

$$\frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1} = \frac{\cosh(\gamma L)\bar{V}_2 + Z_C \bar{I}_2 \sinh(\gamma L)}{Y_C \bar{V}_2 \sinh(\gamma L) + \cosh(\gamma L)\bar{I}_2} = \dots = Z_C \quad (16)$$

ossia, chiudendo su un'impedenza (distribuita o concentrata) uguale all'impedenza caratteristica, all'ingresso della linea vedremo ancora l'impedenza caratteristica. Questo permette la connessione "trasparente" (ossia nessuno dei componenti ne risente degli effetti) di linee e carichi caratterizzati da una stessa impedenza Z_C .

In termini della soluzione dell'equazione dei telegrafisti, questo significa che $\bar{V}(0) = Z_C \bar{I}(0)$ e quindi $\bar{V}^+ = \bar{V}(0)$ e $\bar{V}^- = 0$, cioè avremo solo l'onda diretta, mentre si annullerà quella riflessa, inoltre

$$\begin{cases} \bar{V}(z) = \bar{V}(0)e^{-\gamma z} \\ \bar{I}(z) = Y_C \bar{V}(0)e^{-\gamma z} \end{cases} \quad (17)$$

cioè il rapporto in qualsiasi punto della linea tra la tensione e la corrente sarà comunque pari all'impedenza caratteristica. Vediamo cosa accade alla potenza assorbita dal carico. Ricordando dall'elettrotecnica la potenza complessa (immaginiamo di aver lavorato con i valori efficaci nella definizione dei fasori di tensione e corrente):

$$\bar{S}_2 = P_2 + jQ_2 = \bar{V}_2 \cdot \bar{I}_2^* = Z_C |\bar{I}_2|^2 = \Re(Z_C) |\bar{I}_2|^2 + j\Im(Z_C) |\bar{I}_2|^2 \quad (18)$$

Per cui, nel caso di linea senza perdite caricata sull'impedenza caratteristica, avremo solo potenza attiva, essendo Z_C reale. In ogni caso il valore (ϕ_C è la fase dell'impedenza caratteristica)

$$P_C = \Re(Z_C) |\bar{I}_2|^2 = |Z_C| |\bar{I}_2|^2 \cos(\phi_C) = \frac{|\bar{V}_2|^2}{|Z_C|} \cos(\phi_C) \quad (19)$$

viene denominata *potenza caratteristica* o *potenza naturale* della linea. Notiamo che sempre in queste condizioni di adattamento la potenza in ingresso della linea sarà

$$\bar{S}_1 = P_1 + jQ_1 = \bar{V}_1 \cdot \bar{I}_1^* = Y_C |\bar{V}_1|^2 \quad (20)$$

ma $|\bar{V}_1| = |\bar{V}_2 e^{\gamma L}|$ e quindi $P_1 = e^{2\text{Re}(\gamma)L} P_2$ e lo stesso vale per Q_1 e Q_2

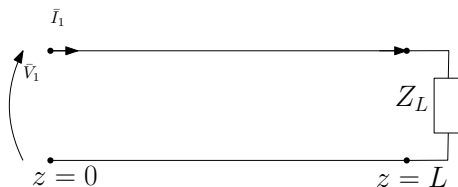
Ossia essendo le perdite sulla linea pari a $P_1 - P_2$ e la potenza reattiva impegnata pari a $Q_1 - Q_2$, detto α la parte reale di γ abbiamo che, nel caso di $2\alpha L \ll 1$,

$$\Delta P = P_1 - P_2 = P_1(e^{2\alpha L} - 1) \cong P_1(1 + 2\alpha L - 1) = P_1 2\alpha L \quad (21)$$

$$\Delta Q = Q_1 - Q_2 = Q_1(e^{2\alpha L} - 1) \cong Q_1(1 + 2\alpha L - 1) = Q_1 2\alpha L \quad (22)$$

Una cosa particolarmente interessante è che nelle linee senza perdite sia ΔP sia ΔQ sono nulle, ossia la potenza reattiva dei capacitori distribuiti è pari (a meno del segno) a quella degli induttori distribuiti. Queste condizioni sono particolarmente importanti nello studio delle linee di distribuzione dell'energia elettrica.

Linea chiusa su un'impedenza arbitraria Z_L



Cosa cambia se il carico differisce dall'impedenza caratteristica?
Dobbiamo valutare cosa succede all'impedenza d'ingresso della linea, all'onda diretta e riflessa e alla potenza trasferita. Partiamo dall'impedenza equivalente vista all'ingresso della linea.

$$\frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1} = \frac{\cosh(\gamma L)\bar{V}_2 + Z_C\bar{I}_2\sinh(\gamma L)}{Y_C\bar{V}_2\sinh(\gamma L) + \cosh(\gamma L)\bar{I}_2} = \frac{\cosh(\gamma L)Z_L\bar{I}_2 + Z_C\bar{I}_2\sinh(\gamma L)}{Y_CZ_L\bar{I}_2\sinh(\gamma L) + \cosh(\gamma L)\bar{I}_2} = \dots \quad (23)$$

$$\begin{aligned}
 Z_{in} &= \frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1} = \frac{\cosh(\gamma L)Z_L + Z_C \sinh(\gamma L)}{Y_C Z_L \sinh(\gamma L) + \cosh(\gamma L)} = \\
 &= Z_C \frac{\cosh(\gamma L)Z_L + Z_C \sinh(\gamma L)}{Z_L \sinh(\gamma L) + Z_C \cosh(\gamma L)} = \\
 &= Z_C \frac{Z_L + Z_C \operatorname{tgh}(\gamma L)}{Z_L \operatorname{tgh}(\gamma L) + Z_C}
 \end{aligned} \tag{24}$$

Nel caso di linea senza perdite $\gamma = \alpha + j\beta = j\beta$,
 $\operatorname{tgh}(j\beta L) = j \operatorname{tg}(\beta L)$ e quindi

$$Z_{in} = Z_C \frac{Z_L + jZ_C \operatorname{tg}(\beta L)}{Z_C + jZ_L \operatorname{tg}(\beta L)} \tag{25}$$

- ▶ $Z_L = 0$ linea cortocircuitata: in questo caso si ottiene facilmente

$$Z_{in} = \frac{Z_C \sinh(\gamma L)}{\cosh(\gamma L)} = Z_C \operatorname{tgh}(\gamma L) \quad (26)$$

Nel caso senza perdite abbiamo $Z_{in} = jZ_C \operatorname{tg}(\beta L)$, ossia l'impedenza è puramente reattiva e varia come la tangente di βL . Ad esempio per $\beta L = \lambda/4 + k\lambda$ con k intero relativo l'impedenza varrà infinito, mentre per $\beta L = \lambda/2 + k\lambda$ varrà zero. (Si ricordi che $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$ è la lunghezza d'onda, mentre β è la costante di propagazione).

- ▶ $Z_L = \infty$ linea aperta: anche in questo caso è facile ottenere l'espressione dell'impedenza d'ingresso

$$Z_{in} = \frac{\cosh(\gamma L)}{Y_C \sinh(\gamma L)} = Z_C \cotgh(\gamma L) \quad (27)$$

Nel caso senza perdite abbiamo $Z_{in} = -jZ_C \cotg(\beta L)$, ossia l'impedenza è puramente reattiva e varia come la cotangente di βL .

- ▶ Z_L qualsiasi, ma lunghezza della linea $\lambda/2$. Analizziamo il caso senza perdite, che è più interessante. In questo caso $\beta L = \beta\lambda/2 = \frac{\beta 2\pi}{2\beta} = \pi$

$$Z_{in} = Z_C \frac{Z_L + jZ_C \operatorname{tg}(\pi)}{Z_C + jZ_L \operatorname{tg}(\pi)} = Z_L \quad (28)$$

Quindi l'impedenza d'ingresso sarà proprio uguale all'impedenza collegata come carico in uscita.

- ▶ Z_L qualsiasi, ma lunghezza della linea $\lambda/4$. Analizziamo anche questa volta il caso senza perdite, che è più interessante. In questo caso $\beta L = \beta\lambda/4 = \frac{\beta 2\pi}{4\beta} = \pi/2$

$$Z_{in} = Z_C \frac{jZ_C}{jZ_L} = \frac{Z_C^2}{Z_L} \quad (29)$$

Ricordiamo che tutte queste espressioni semplificate valgono alla sola pulsazione ω considerata nell'analisi.

Abbiamo prima visto che, se poniamo a fine linea un'impedenza pari all'impedenza caratteristica, abbiamo solo ed esclusivamente l'onda diretta. Per questo motivo avevamo detto che il carico in queste condizioni si diceva adattato. Cosa accade all'onda diretta e riflessa in condizioni di non adattamento? Al solito partiamo dall'espressione

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma L) & Z_C \sinh(\gamma L) \\ Y_C \sinh(\gamma L) & \cosh(\gamma L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_2 \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix} \quad (30)$$

dove, però stavolta $\bar{V}_2 = Z_L \bar{I}_2$.

Semplici calcoli ci permettono di scrivere

$$\begin{cases} \bar{V}(0) = \bar{V}_1 = [Z_L \cosh(\gamma L) + Z_C \sinh(\gamma L)] \bar{I}_2 \\ \bar{I}(0) = \bar{I}_1 = [Z_L Y_C \sinh(\gamma L) + \cosh(\gamma L)] \bar{I}_2 \end{cases} \quad (31)$$

ed essendo $\bar{V}^+(0) = \frac{\bar{V}(0) + Z_C \bar{I}(0)}{2}$ e $\bar{V}^-(0) = \frac{\bar{V}(0) - Z_C \bar{I}(0)}{2}$, il rapporto tra le due onde risulta uguale a:

$$\Gamma(0) = \frac{\bar{V}^-(0)}{\bar{V}^+(0)} = \frac{\bar{V}(0) - Z_C \bar{I}(0)}{\bar{V}(0) + Z_C \bar{I}(0)} \quad (32)$$

$$= \frac{[Z_L \cosh(\gamma L) + Z_C \sinh(\gamma L)] - Z_C [Z_L Y_C \sinh(\gamma L) + \cosh(\gamma L)]}{[Z_L \cosh(\gamma L) + Z_C \sinh(\gamma L)] + Z_C [Z_L Y_C \sinh(\gamma L) + \cosh(\gamma L)]} \quad (33)$$

$$= \frac{Z_L \cosh(\gamma L) + Z_C \sinh(\gamma L) - Z_L \sinh(\gamma L) - Z_C \cosh(\gamma L)}{Z_L \cosh(\gamma L) + Z_C \sinh(\gamma L) + Z_L \sinh(\gamma L) + Z_C \cosh(\gamma L)} \quad (34)$$

$$= \frac{(Z_L - Z_C) (\cosh(\gamma L) - \sinh(\gamma L))}{(Z_L + Z_C) (\cosh(\gamma L) + \sinh(\gamma L))} \quad (35)$$

ma $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ e $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ e quindi:

$$\cosh(x) + \sinh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = e^x \quad (36)$$

$$\cosh(x) - \sinh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} = e^{-x} \quad (37)$$

da cui

$$\Gamma(0) = \frac{(Z_L - Z_C)(\cosh(\gamma L) - \sinh(\gamma L))}{(Z_L + Z_C)(\cosh(\gamma L) + \sinh(\gamma L))} = \frac{(Z_L - Z_C)}{(Z_L + Z_C)} e^{-2\gamma L} \quad (38)$$

ma del resto possiamo anche definire il rapporto tra queste due grandezze per z qualsiasi e si avrà

$$\Gamma(z) = \frac{\bar{V}^-(z)}{\bar{V}^+(z)} = \frac{\bar{V}^-(0)e^{+\gamma z}}{\bar{V}^+(0)e^{-\gamma z}} = \frac{(Z_L - Z_C)}{(Z_L + Z_C)} e^{2\gamma(z-L)} \quad (39)$$

Chiameremo questo parametro così calcolato coefficiente di riflessione. In particolare sebbene lungo la linea dipenda da z , risulta importante calcolarlo in corrispondenza del carico, ossia per $z = L$, per cui si ottiene il valore

$$\frac{Z_L - Z_C}{Z_L + Z_C} \quad (40)$$

Si noti che, come è giusto che debba risultare, per una linea adattata il coefficiente di riflessione è zero!

- ▶ Se $Z_L = 0$, ossia la linea è chiusa su un corto circuito
 $\Gamma(L) = -1$
- ▶ Se $Z_L = \infty$, ossia la linea è aperta $\Gamma(L) = 1$

A questo punto è possibile esprimere in qualsiasi punto della linea, l'onda riflessa in termini dell'onda diretta (o incidente), tramite il coefficiente di riflessione $\Gamma(z)$, usando l'espressione $\bar{V}^-(z) = \Gamma(z)\bar{V}^+(z)$. A questo punto è possibile scrivere le seguenti espressioni:

$$\begin{cases} \bar{V}(z) = \bar{V}^+(z) + \bar{V}^-(z) = \bar{V}^+(z) [1 + \Gamma(z)] = \\ \bar{I}(z) = Y_C [\bar{V}^+(z) - \bar{V}^-(z)] = Y_C \bar{V}^+(z) [1 - \Gamma(z)] \end{cases} \quad (41)$$

Ci chiediamo quanto vale adesso la potenza attiva sul carico.

Al solito se immaginiamo di aver usato i valori efficaci possiamo scrivere (supponiamo l'impedenza caratteristica reale per semplificare i calcoli e la notazione):

$$P_{carico} = \Re(\bar{V}(L) \cdot \bar{I}^*(L)) = \quad (42)$$

$$= \Re \left[[\bar{V}^+(L)(1 + \Gamma(L))] \cdot Y_C [\bar{V}^+(L)(1 - \Gamma(L))]^* \right] = \quad (43)$$

$$= Y_C |\bar{V}^+(L)|^2 (1 - |\Gamma(L)|^2) = \quad (44)$$

$$= Y_C \left[|\bar{V}^+(L)|^2 - |\bar{V}^-(L)|^2 \right] = \quad (45)$$

$$= P_{incidente} - P_{riflessa} \quad (46)$$

Ancora una volta, se il carico fosse adattato avremmo solo Potenza incidente.

Dal punto di vista ingegneristico spesso si fa riferimento a due altre grandezze legate al coefficiente di riflessione, ossia la *Perdita di Ritorno* o *Return Loss/RL* e il *Rapporto di onda Stazionaria in tensione/ROS* o *Voltage Standing Wave Ratio/VSWR*. Il Return Loss è definito come il rapporto (di solito in dB) tra potenza incidente e potenza riflessa:

$$RL_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{P_{inc}}{P_{rifl}} \right) = -20 \log_{10} |\Gamma(L)| \quad (47)$$

Il ROS è dato invece da

$$ROS = VSWR = \frac{1 + |\Gamma(L)|}{1 - |\Gamma(L)|} \quad (48)$$

Per spiegare quest'ultimo parametro facciamo riferimento ad una linea caricata con un carico qualsiasi (e per semplicità supponiamo la linea senza perdite). La tensione nel generico punto z sarà combinazione del termine d'onda diretta e riflessa

$$\bar{V}(z) = \bar{V}^+(z) + \bar{V}^-(z) = \bar{V}^+(z)(1 + \Gamma(z)) = \quad (49)$$

$$= \bar{V}^+(z) \left(1 + \Gamma(L)e^{j2\beta(z-L)}\right) \quad (50)$$

Se ne calcoliamo il modulo avremo:

$$|\bar{V}(z)| = |\bar{V}^+(z)| |(1 + \Gamma(z))| = \quad (51)$$

$$= |\bar{V}^+(z)| \left| \left(1 + \Gamma(L)e^{j2\beta(z-L)}\right) \right| \quad (52)$$

detta Ψ la fase di $\Gamma(L)$ abbiamo $\Gamma(L) = |\Gamma| e^{j\Psi}$, sostituendo troviamo:

$$|\tilde{V}(z)| = |\tilde{V}^+(z)| \left| \left(1 + |\Gamma(L)| e^{j[2\beta(z-L) + \Psi]} \right) \right| = \quad (53)$$

$$= |\tilde{V}^+(z)| \sqrt{[1 + |\Gamma(L)| \cos(2\beta(z-L) + \Psi)]^2 + [|\Gamma(L)| \sin(2\beta(z-L) + \Psi)]^2} = \quad (54)$$

$$= |\tilde{V}^+(z)| \sqrt{1 + |\Gamma(L)|^2 + 2|\Gamma(L)| \cos(2\beta(z-L) + \Psi)} \quad (55)$$

ossia è una funzione sinusoidale che assumerà massimi e minimi in determinate posizioni. Questo significa che combinando onda diretta e riflessa si trova un'onda stazionaria.