1. **ELETTROTECNICA – Richiami di Elettromagnetismo**

**1.1 Equazioni di Maxwell**

Dove:  operatore nabla

= campo elettrico somma di un campo elettrostatico ed uno indotto [V/m]

induzione magnetica [T]

campo magnetico [A/m]

densità di corrente di conduzione [A/m2]

spostamento elettrico [C/m2]

densità volumetrica di carica elettrica [C/m3]

Le equazioni di Maxwell sono in *forma vettoriale*, mentre i modelli circuitali si basano su *equazioni scalari*. Occorre dunque apportare delle modifiche al sistema di equazioni.

**1.2 Unità di misura**

Prima di affrontare questo problema, però, focalizziamo l’attenzione sulle *unità di misura* che descrivono le grandezze che compaiono nelle 4 espressioni.

Il sistema di unità di misura che viene utilizzato in elettrotecnica è il MKSA (*Metro, Kilogrammo, Secondo e Ampère*). Vediamo ad esempio le dimensioni di alcune grandezze cinematiche e dinamiche (per indicare l’*analisi* *dimensionale* si inserisce la grandezza tra parentesi quadre):

**[]** = [velocità] = m/s

**[]** = [accelerazione] = m/s2

**[]** = [forza] = [massa × accelerazione] = Kg = N (Newton)

In queste tre grandezze compaiono M, K e S. Passando a grandezze “elettriche” introduciamo un’altra unità di misura: l’Ampère, che misura l’intensità di corrente elettrica.

In realtà l’Ampère deriva da un’altra unità di misura che non compare nella sigla del sistema, che è il Coulomb, ossia l’unità di misura della carica elettrica (indicata generalmente con Q). Coulomb scoprì che tra due cariche immerse nello spazio e poste ad una certa distanza si crea una forza elettrostatica, descritta dalla seguente formula:

Dove è la *permettività elettrica* che indica le *caratteristiche del mezzo* materiale dove sono immerse le cariche.

**1.2 Campo elettrico**

Se nel nostro spazio abbiamo solo una carica Q, ho un campo elettrico e la forza elettrostatica si manifesta solo nel momento in cui nello spazio viene introdotta un’altra carica elettrica.

Dall’equazione sopra si evince che una carica crea un campo elettrico, cioè una forza per unità di carica. In generale quindi abbiamo che:

*N.B: il campo elettrico appena individuato è diverso da quello presente nella prima equazione di Maxwell perché è elettrostatico, ossia il suo rotore è nullo.*

**1.3 Potenziale elettrico**

Introduciamo il concetto di lavoro, le cui dimensioni sono:

**[]**= lavoro = forza × spostamento = Kg = N × m = Joule (J)

In forma integrale:

Se a sostituisco la formula in funzione del campo elettrico, precedentemente individuata, ho che:

Che esprime il lavoro potenziale, o più semplicemente, potenziale.

Se abbiamo due punti A e B collegati da un percorso **λ** possiamo allora parlare di differenza di potenziale (**∆V**) tra due punti. In simboli:

A

λ B

***Che relazione c’è tra la carica e l’ampère?***

L’Ampère è l’unità di misura della corrente. Una corrente viene definita come la *quantità di carica*, o meglio il tasso di variazione di carica, *che attraversa la sezione di una superficie in un determinato intervallo di tempo tendente a zero* (infinitesimale). In simboli:

da cui ricaviamo le dimensioni dell’Ampère 🡪

Sapendo le dimensioni della carica in funzione dell’Ampère possiamo riportare al nostro sistema MKSA anche l’unità di misura del Volt:

Ultimato il discorso sulle unità di misura con cui lavoreremo, torniamo alla corrente elettrica.

**1.4 Corrente elettrica nel modello continuo**

La definizione data in precedenza che coinvolge la variazione temporale di carica, pur essendo corretta, non è del tutto funzionale.

Introduciamo allora una seconda definizione della corrente più adatta alle nostre esigenze che fa riferimento al *modello del mezzo continuo*, che non vede la carica come una “sferetta” immersa nello spazio, ma prevede un ambiente in cui vi è una densità di carica.

Non a caso nella quarta equazione di Maxwell compare il termine (che dimensionalmente sarebbe Coulomb/ m3 ). Ciò vuol dire che la carica elettrica Q la possiamo definire solo nel momento in cui definiamo un volume macroscopico (V):

Ora possiamo definire la grandezza , detta densità di corrente di conduzione, come il prodotto tra la densità volumetrica che ho in un certo spazio e la velocità della particella dotata di carica:

Già da quest’ultima espressione si capisce che mentre nella prima definizione di corrente contavamo le cariche (la variazione temporale di cariche), ora *associamo* *alle cariche una velocità*. Ma se stiamo associando ad ogni particella una velocità, stiamo di fatto definendo un *flusso* (corrente elettrica), che può essere formalizzato con il seguente integrale:

Dove **S** è la superficie di riferimento e è il versore perpendicolare a tale superficie.

In questo secondo modo di esprimere la corrente elettrica ci concentriamo su una *caratteristica geometrica* che nella prima definizione non era presente e la variabile tempo è contenuta comunque nella grandezza . Tuttavia ci liberiamo dal vincolo temporale perché anche se stiamo in un regime stazionario, dove la derivata temporale è zero, la corrente non si annulla perché c’è lo stesso una velocità di valore costante (solo l’accelerazione, ossia la derivata temporale della velocità, è nulla) e quindi abbiamo una corrente costante sulla superficie.

Prima di occuparci di questo problema, ritorniamo al concetto di differenza di potenziale…

**1.5 Conservatività del campo elettrico (Campo elettrostatico)**

Dato un campo elettrico , dove sono immerse due cariche A e B, posso calcolarmi la differenza di potenziale che c’è sul percorso λ1 che collega A e B:

A λ2

λ1 B

se poi dal punto B ritorniamo in A secondo un percorso diverso λ2, e ricalcoliamo la differenza di potenziale, scopriamo che si ottiene lo *stesso valore* rilevato sul percorso da A a B, ma cambiato di segno. Ciò vuol dire che la somma dei contributi dei due percorsi, in termini di differenza di potenziale, è zero. Questo risultato matematico, tradotto in termini fisici, ci permette di parlare di campo conservativo, un campo in cui la circuitazione risulta nulla lungo una qualunque linea chiusa:

Dove la “**s**” a pedice sta a indicare che il campo è *elettrostatico*.

**CONVENZIONE SULLA DIFFERENZA DI POTENZIALE**

Nel campo elettrostatico è presente una carica, che può essere positiva o negativa. Tuttavia, a prescindere dal valore della carica, la convenzione è quella di mettere un meno davanti all’integrale di linea:

Questa convenzione è legata al fatto che possiamo avere forze *attrattive* o *repulsive*, a seconda che abbiamo rispettivamente cariche di segno opposto o cariche di segno uguale. Se la carica è positiva, inoltre, il campo elettrico è uscente dalla carica e viceversa:

+ + REPULSIONE

+ - ATTRAZIONE

**1.5 Relazione tra campi magnetici ed elettrici: l’elettromagnetismo**

Se le grandezze non variano nel tempo ci troviamo nel campo della *statica* e allora parleremo di elettrostatica e magnetostatica *separatamente*.

Se invece le grandezze variano nel tempo ecco che i campi elettrici interagiscono con i campi magnetici e danno origine a campi elettromagnetici.

**1.6 Induzione magnetica**

È dato un campo magnetico di induzione , variabile nel tempo e agente su una spira “a cappio”, cioè una spira che descrive una superficie chiusa, ma con i due morsetti (iniziale e finale) non in contatto tra loro:

A

B

S

Tra i morsetti A e B effettuiamo una misurazione con un voltmetro e rileviamo una certa quantità “***e***” di Volt, pari alla variazione temporale del flusso **φ** del campo magnetico attraverso la superficie S individuata dalla spira:

dove

In accordo con la definizione data in precedenza della differenza di potenziale, se la grandezza “***e***” rappresenta dei volt allora essa potrà essere espressa come integrale di linea di un campo elettrico, o meglio, come si può notare dalla figura, come *circuitazione* di un campo elettrico lungo un percorso “***l***”, (lunghezza della spira):

Sostituendo alla “***e***” questa nuova espressione ottengo la seguente equazione:

A questo punto richiamiamo alla memoria il teorema del rotore che afferma che “*la circuitazione di un campo vettoriale calcolata lungo un percorso chiuso λ è uguale al flusso del suo rotore attraverso una superficie S di bordo (λ)”.*

Applicando tale teorema si giunge alla prima equazione di Maxwell:

E siccome il rotore di non risulta nullo, allora il campo non è conservativo.

È bene ricordare che la misurazione della ddp è stata possibile perché la spira è fatta di *materiale conduttore*. Qualora, infatti, la misurazione fosse stata effettuata su una spira di spago (non conduttore), nonostante la presenza del campo magnetico non sarebbe stata rilevata alcuna attività elettrica. Questo accade perché i voltmetri sono in grado di misurare soltanto campi elettrostatici.

La forza elettromotrice del voltmetro separa le cariche presenti nel mezzo conduttore e misura un campo elettrostatico dovuto alla *distribuzione di cariche*. Se io sostituisco il mezzo conduttore con uno non conduttore come lo spago, la forza elettromotrice c’è lo stesso ma il mezzo non permette di separare le cariche e quindi di effettuare una misurazione. In realtà nella prima equazione di Maxwell il campo elettrico è dato dalla somma di un campo elettrostatico (presente solo se il mezzo è conduttore) e uno indotto dalla forza elettromotrice:

Se facciamo il rotore di questa espressione:

Il secondo termine si elimina perché il campo è conservativo e rimangono due campi di uguale valore ma che hanno segno opposto perché il primo è un campo che vuole “spingere” le cariche, l’altro invece è un campo che misura la distribuzione del campo che si è verificata nel conduttore.

Questo è il principio alla base delle batterie elettriche, dove un campo elettromotore ( separa tramite un processo chimico le cariche (accessibili tramite due morsetti) e converte energia chimica in energia elettrica spostando le cariche verso il polo positivo da dove esce il campo elettrico , di segno opposto a quello elettromotore:

**1.6 Divergenza del campo magnetico indotto**

Analizziamo ora la terza equazione di Maxwell sulla *divergenza del campo magnetico indotto*.

Se un campo ha divergenza nulla è detto solenoidale. In un campo solenoidale, le linee di forza del campo si richiudono su loro stesse perché il campo magnetico non ammette *monopoli magnetici* come nel caso del campo elettrico dove abbiamo *sorgenti* o *pozzi* di campo a seconda che la carica sia rispettivamente positiva (verso uscente) o negativa (verso entrante).

S

N

Il teorema di Gauss afferma che *“il flusso di un campo vettoriale attraverso la superficie chiusa S coincide con l’integrale della divergenza del campo calcolato nel volume V racchiuso dalla superficie S”*:

Per far sì che il flusso lungo la superficie sia nullo, una linea di forza che entra nel volume, ne esce anche.

Per ricavare le unità di misura del campo magnetico indotto , facciamo riferimento a una delle equazioni mostrate in precedenza (quella dell’esperienza con la spira “a cappio”):

**1.7 Leggi costitutive del mezzo**

Rimangono ora da spiegare i termini e delle equazioni di Maxwell.

Partiamo da delle semplici osservazioni: e sono dei campi che esistono a prescindere dalla presenza o meno di mezzi conduttori perché sono proprietà dovute a campi di forze.

Se prendiamo le due armature di un condensatore e ne carichiamo positivamente una, tra le armature si genera un campo elettrico . La forza che sposta le cariche da un’armatura all’altra dipende dal mezzo dielettrico che abbiamo tra le armature stesse. Ed è qui che entra in gioco il vettore , che *fornisce informazioni sul mezzo dielettrico:*

Dove indica la permettività elettrica del mezzo.

Parimenti, se prendo un filo attraversato da una corrente e applico la legge di Ampère, so che a una certa distanza posso calcolarmi il campo magnetico , generato dalla corrente. Gli effetti macroscopici di tale campo, però, dipendono anche qua dal mezzo dove agisce: per esempio se sto nel vuoto l’induzione magnetica avrà un valore più basso rispetto al caso in cui il mezzo fosse costituito da ferro. In simboli:

Dove indica la permeabilità magnetica del mezzo.

Mentre la prima equazione individuata riguarda i *mezzi dielettrici* e la seconda quelli *magnetici*, vi è una terza legge che si occupa dei *mezzi conduttori*:

Dove indica la conducibilità del mezzo, che si può scrivere anche come inverso della resistività **ρ** (.

Queste tre equazioni che abbiamo individuato in precedenza vanno a completare le 4 equazioni di Maxwell e prendono il nome di leggi costitutive del mezzo.

*N.B. in natura è inverosimile realizzare puri mezzi conduttori, puri mezzi dielettrici e puri mezzi magnetici perché le tre caratteristiche sono inalienabili.*

Occupiamoci ora dell’ultima equazione di Maxwell…

Essa deriva dal Teorema di Gauss: “se prendo una superficie chiusa che avvolge un volume al cui interno ho una densità di carica che genera un campo elettrico (quindi ho dipendenza dal mezzo), la carica elettrica si può calcolare come il flusso di attraverso la superficie chiusa che avvolge tutta la carica”.

Per ricavare l’unità di misura di sfruttiamo due osservazioni: la prima è che conosciamo già le unità di misura della densità di carica ; la seconda è che l’operatore nabla effettua la derivata spaziale delle grandezze a cui è applicato:

Ed essendo x, y e z coordinate spaziali dimensionalmente espresse dal metro, nabla sarà m-1.

Abbiamo quindi che:

*N.B. facendo la derivata temporale di , otteniamo come unità di misura quelle di una densità di carica (A/m2) in accordo con quelle di nella seconda legge di Maxwell.*

**1.8 Corrente di spostamento**

Della seconda equazione di Maxwell rimane ora da spiegare la presenza del termine , di cui al momento sappiamo solo l’unità di misura, la stessa di , cioè A/m2, e che rappresenta una *densità di corrente* che, tuttavia, non è di conduzione come .

Riprendiamo l’esempio del condensatore: se lo carichiamo una volta e basta misureremo sempre una certa differenza di potenziale dovuta alla distribuzione di cariche; se, invece, le cariche le facciamo variare nel tempo variano anche le cariche che si “spostano” da un’armatura all’altra del condensatore. Questo spostamento non è dovuto a un vero e proprio moto di cariche.

In condizioni di stazionarietà questo fenomeno non si verifica e quindi il termine , detto corrente di spostamento, non compare nella legge, e la densità di carica è data solo da .