**3. ELETTROTECNICA – Bipoli**

Riprendiamo i principi di Kirchhoff:

**3.1 Misurazione e convenzione sui segni delle correnti e delle tensioni**

È data una superficie chiusa (per esempio una sfera) attraversata da quattro correnti:

i1 + i3 +

+

i2 i4 +

Le frecce usate per indicare il verso delle correnti non rappresentano dei vettori, ma il modo in cui è stato adoperato l’*amperometro* per misurare l’intensità della corrente. L’amperometro, infatti, come il voltmetro, possiede due puntali che vanno puntati sempre nello stesso modo altrimenti otteniamo una misurazione opposta di segno (la punta della freccia indica il “positivo” dello strumento PER OGNI corrente che intendo misurare). Applichiamo il principio alle correnti di Kirchhoff:

*N.B.: il segno “-“ davanti alle ultime due intensità sta ad indicare che è stata effettuata una misurazione opposta a quella di e (in altre parole: se la corrente entra nella superficie è positiva, altrimenti è negativa).*

Stesso discorso vale per le tensioni…

È dato un percorso chiuso sul quale misuro delle d.d.p:

V3

B C

A V2

V4

D

V1

E V5

Le d.d.p misurate saranno positive se concordi con il verso della circuitazione, altrimenti saranno negative. Il verso della circuitazione indica il modo in cui misuro con il voltmetro; anche qui la punta della freccia indica il “positivo” dello strumento: ciò spiega il dover mettere un segno “-“ davanti a quelle d.d.p. che si “oppongono” al verso della circuitazione, cioè a quelle d.d.p per le quali abbiamo effettuato una misurazione “opposta”.

Applicando il principio alle tensioni di Kirchhoff otteniamo:

**3.2 Bipoli**

La regione materiale più semplice è detta bipolo ed è accessibile tramite due superfici equipotenziali rappresentate da due morsetti (A e B):

A B

*N.B.:*

* *Il principio alle correnti di Kirchhoff è rispettato perché se per esempio come superficie chiusa ne assumiamo una che ingloba la regione ma non i morsetti, la corrente entrante , è uguale alla corrente uscente, e quindi abbiamo che:*  ***🡪*** *;*
* *Il principio alle tensioni di Kirchhoff è rispettato perché se i due morsetti sono equipotenziali allora la somma algebrica delle d.d.p misurate darà zero;*
* *all’interno della regione è inserito uno o più parametri concentrati (resistenza, capacità o induttanza) e ci troviamo in regime quasi stazionario*
* *all’esterno della regione (superfici equipotenziali) ci troviamo in regime stazionario*

**3.2.1 Resistore**

Per scoprire la legge costitutiva del resistore partiamo dalle equazioni di campo. In particolare dall’equazione costitutiva del mezzo conduttore (in assenza di un campo elettromotore agente nel mezzo):

*N.B.: un filo di rame, preso singolarmente, non è attraversato da corrente e non presenta d.d.p perché non c’è un campo elettromotore che genera corrente. In un circuito quindi avrò sicuramente un campo elettromotore, ma questo non sarà presente all’interno della regione materiale occupata dal resistore.*

Il campo elettrico è presente nella regione del bipolo:

A B

Calcoliamo la d.d.p tra i morsetti A e B:

È stato possibile eliminare il prodotto scalare perché il vettore è per ipotesi sempre perpendicolare alla giacitura della sezione trasversale:

A B

Se ha lo stesso valore per ogni punto della superficie (in modulo, verso e direzione) allora l’intensità della corrente entrante possiamo definirla come:

E quindi l’integrale di prima diventa:

Dove è la lunghezza del filo e è la sua sezione trasversale.

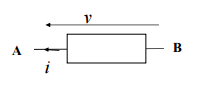
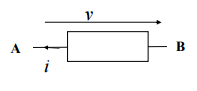
Il termine è una costante ed è detta resistenza **R**. Sostituendo nell’equazione otteniamo la legge di Ohm:

L’unità di misura della resistenza è l’Ohm:

*N.B: solo nel caso in cui la geometria del resistore è cilindrica R assume la forma appena vista.*

**CONVENZIONE DEGLI UTILIZZATORI E DEI GENERATORI**

Tuttavia la legge di Ohm così come l’abbiamo scritta è *incompleta* perché non fornisce nessuna informazione su COME abbiamo misurato . Se il puntale del voltmetro è posizionato in modo tale che la freccia che indica sia *discorde* con la direzione della corrente entrante allora si dice che è stata usata la convenzione degli utilizzatori; viceversa se le due frecce sono *concordi* allora stiamo usando la convenzione dei generatori e bisognerà mettere un segno “-“ davanti a (perché la d.d.p sarà data da , con un “-“ davanti l’integrale):

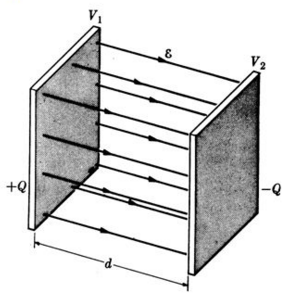
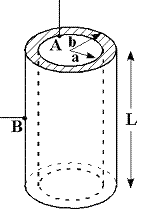
**CONVENZIONE DEI GENERATORI CONVENZIONE DEGLI UTILIZZATORI**

**3.2.2 Condensatore**

Il condensatore è un elemento con comportamento prevalentemente *dielettrico*, pertanto soddisfa la seguente equazione di campo:

Se schematizziamo un bipolo relativo a questo mezzo, il mezzo dielettrico deve poter colloquiare con l’esterno della regione attraverso qualcosa su cui posso effettuare misure di carica accumulata: le armature del condensatore sono strutture metalliche (quindi conduttrici) che confinano il mezzo dielettrico e permettono l’accumulo di carica.

Esistono vari tipi di condensatori a seconda della forma geometrica che presentano le armature: condensatore ad armature piane, cilindriche o sferiche:

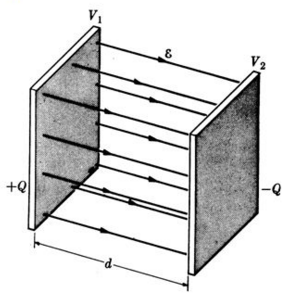
Anche per il condensatore l’obiettivo è quello di trovare un legame tra tensione e corrente misurate con gli strumenti.

Partiamo dall’osservare che se dobbiamo prevedere la presenza di una corrente allora dobbiamo ammettere l’esistenza della corrente di spostamento tra le due armature; ma ammettere ciò significa considerare non nulle le derivate temporali all’interno della regione (regime quasi stazionario) e per garantire , occorre stabilire che il campo elettrico non produca campo magnetico.

Riprendiamo la formula locale del Teorema di Gauss:

Il flusso del campo elettrico (), attraverso una superficie chiusa, ci restituisce il valore della carica **Q** contenuta nel volume avvolto dalla superficie chiusa:

Tornando al condensatore…



Sull’armatura di sinistra mettiamo una carica elettrica **+Q**, per *induzione elettrostatica* si forma una carica **-Q** sull’altra armatura. A questo punto possiamo applicare il Teorema di Gauss perché, come si nota anche in figura, si forma un flusso di attraverso una superficie chiusa, che nel caso del condensatore a facce piane coincide con quella di un parallelepipedo di larghezza.

Tale flusso restituisce la carica **Q**:

Ricordando che uscente dalla carica è positivo e ipotizzando che all’interno del mezzo dielettrico il campo elettrico sia *costante* e *uniforme* lungo tutta la faccia, si può dimostrare che l’integrale di prima può essere riscritto come:

Al posto di , inseriamo la relazione che c’è tra potenziale e il campo elettrico:

Ottenendo:

Abbiamo dunque trovato una legge che lega la con la . Il termine è una costante che prende il nome di capacità del condensatore e ingloba le caratteristiche geometriche delle armature e del mezzo dielettrico interposto tra esse:

L’unità di misura della capacità è il Farad:

*N.B.: la formula della capacità scritta sopra vale solo per un condensatore a facce piane; per altri tipi di geometrie l’equazione subirà alcune modifiche.*

Anche qui la convenzione adottata è quella degli utilizzatori, avendo ipotizzato verso della corrente e della tensione discordi tra loro. Qualora fossero stati concordi avremmo messo un segno “-“ davanti all’integrale e pertanto la dicitura esaustiva per descrivere la capacità di un condensatore sarà:

Tuttavia aver trovato questa equazione non basta perché ricordiamo che il nostro obiettivo era quello di trovare un legame tra corrente e tensione. Occorre fare un’ultima considerazione a partire dalla prima definizione della corrente:

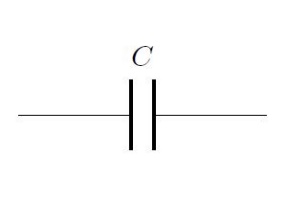
Ovviamente se il condensatore ha parti meccaniche fisse il termine  si annulla.

I circuiti che hanno un parametro che non varia nel tempo sono detti tempo invarianti. Quindi se ho un condensatore tempo invariante, la corrente sarà data solo da:

**3.3 Bipoli con memoria elettrica**

È dato un condensatore con capacità :

v



Se carichiamo il condensatore, senza far circolare ulteriore corrente nel circuito (questa condizione viene detta *“a vuoto”*) l’armatura rimane carica. Ossia se “a vuoto” misuriamo con un voltmetro la tensione ai morsetti rileviamo una certa quantità di Volt; cosa che non accade in un resistore “a vuoto”, dove se non ho corrente, non ho tensione ai morsetti.

Quindi se il condensatore al tempo **t=0** è carico, misureremo una tensione che chiameremo .

Se invece usciamo dalla condizione “a vuoto” e inseriamo nel circuito un generatore di corrente (forma rettangolare nel disegno) allora avrò che la corrente non è più nulla ma è data da:

Separando le variabili e integrando successivamente ottengo:

Da cui:

Dove il termine non è legato all’evoluzione nel tempo della corrente, ma è una memoria di quello che succedeva al condensatore nell’istante prima del momento in cui abbiamo iniziato a monitorare l’andamento della tensione nel tempo. Naturalmente se all’inizio il condensatore fosse stato *scarico* il termine sarebbe stato pari a zero.

Tutti i bipoli che, come il *condensatore*, hanno nella loro legge costitutiva la derivata nel tempo di una delle due grandezze fondamentali (tensione o corrente) sono detti bipoli con memoria. Il *resistore* nella sua legge costitutiva, non presentando un’equazione differenziale, è un bipolo resistivo puro senza memoria.

Tuttavia il resistore possiede una memoria termica perché la resistività del resistore è in realtà in funzione della temperatura:

Dove: - resistività;

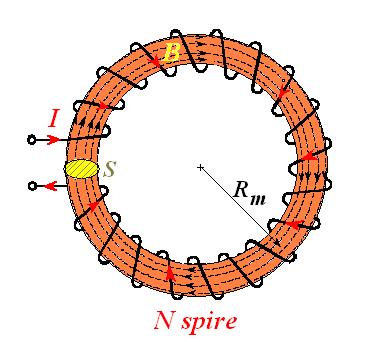
- **T** temperatura;

- resistività del materiale alla temperatura di riferimento, solitamente 20-25 °C;

- **α** coefficiente termico dipendente dal materiale.

**3.4 Induttore**

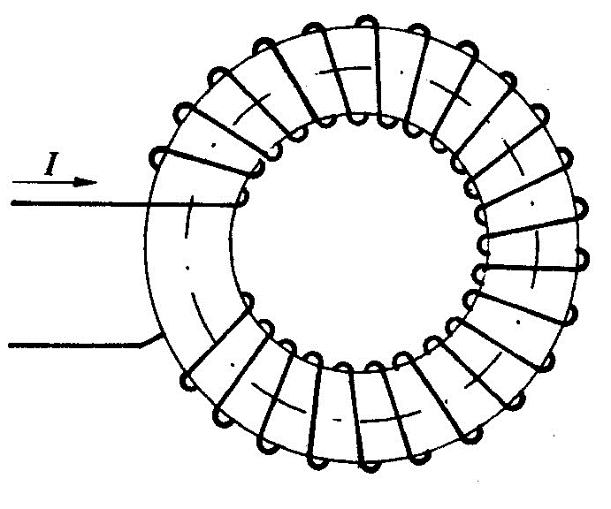
Immaginiamo di prendere un materiale magnetico di forma toroidale attorno al quale avvolgiamo **N** spire e facciamo scorrere una corrente :



Riprendiamo l’equazione che lega il campo magnetico alla densità di corrente di conduzione :

*N.B.: il termine , non compare a completare l’equazione perché ipotizziamo l’assenza di un mezzo dielettrico.*

Tagliamo trasversalmente il toroide:



Applichiamo un integrale di flusso a entrambi i membri:

Applichiamo al primo membro il teorema del rotore:

Il secondo membro richiama la definizione di corrente. A questo punto per capire come sono collegate corrente e tensione dobbiamo capire dove si manifesta il flusso di , ovvero di : ricordiamo, infatti, che i due vettori indicano sempre il campo magnetico a meno di una costante:

Tale flusso di campo magnetico avviene sulla superficie **S**:

**S** **λ**

Sulla stessa superficie consideriamo il rotore del campo elettrico, che, agendo come f.e.m. (perché se effettuiamo una misurazione con un voltmetro rileviamo effettivamente un determinato valore di tensione), sposta la carica positiva che a sua volta genera un campo elettrostatico uguale e opposto al campo indotto. Quindi il campo elettrico sarà composto da un campo elettrostatico, di rotore nullo, e da uno indotto di rotore pari a . Il voltmetro rileverà quest’ultimo termine, che corrisponderà alla tensione misurata :

Effettuando la circuitazione di lungoilpercorso chiuso **λ** (che rappresenta una spira) abbiamo che:

Dove il primo membro rappresenta la circuitazione misurata sul percorso **λ** che ci restituisce la tensione ;al secondo membro possiamo invece porre , che rappresenta il flusso sulla superficie **S** (unità di misura: **Weber = V ּ s**):

*N.B.: la spira in realtà non è chiusa perché altrimenti la tensione misurata sarebbe zero. Inoltre teniamo presente che la tensione misurata* *va moltiplicata per il numero di spire (****N****) che possiede l’induttore.*

**3.5 Dualità**

Mettendo a confronto la formula appena trovata con la definizione di corrente, già possiamo notare alcune analogie tra tensione e corrente:

Le due equazioni sono infatti duali e, di conseguenza, saranno duali la carica e il flusso . Ora se nel condensatore , e se la condizione di dualità è vera, allora il flussosarà datodal prodotto tra l’intensità della corrente , *duale* della tensione , e un parametro concentrato che chiameremo che sarà il *duale* della capacità **c**.

Per arrivare a, riprendiamo il problema del toroide, e in particolare l’equazione:

Se ipotizzo il campo uniforme su tutta la struttura e parallelo al vettore , il primo integrale diventa banalmente:

Nel secondo integrale, invece, va notato che la densità di corrente non è continua all’interno della superficie , ma la corrente che genero, entra ed esce dalla superficie tante volte quante sono le spire (cioè **N** volte):

E quindi avremo che:

Per esplicitare torniamo alla definizione di flusso:

Che applicato a **N** spire, fornisce il flusso concatenato:

Da cui ricaviamoe successivamente:

Sostituendo nell’equazione di prima, si ricava il valore del flusso **:**

Infine si inserisce il flusso all’interno dell’equazione:

Dove il termine cerchiato in rosso è una *costante* (perché dipende solo dal materiale e dalla geometria dell’induttore) che prende il nome di induttanza **L**, definita più semplicemente come:

L’unità di misura dell’induttanza è l’Henry (**H**):

Effettuando le derivate nel tempo otteniamo la legge costitutiva dell’induttore:

Da notare che tale risultato è in perfetta dualità con quello ottenuto studiando il condensatore:

**3.6 Energia e potenza**

La potenza è definita come derivata dell’energia rispetto al tempo:

L’unità di misura della potenza elettrica è il Watt ().

Per vedere come entra in gioco la potenza partiamo col fare un’analisi dimensionale del prodotto scalare tra il campo elettrico e la densità di corrente di conduzione

Notiamo che abbiamo ottenuto una *densità di potenza*. Per ottenere la potenza effettuiamo un integrale di linea riferito a un volume **V**:

*N.B.: il prodotto tensione per corrente vale solo nei circuiti, cioè laddove non vi è presenza di fenomeni elettromagnetici.*

**3.6.1 Potenza di un resistore ideale**

Ricordando che la legge costitutiva del resistore è la potenza sarà:

Tale potenza è anche detta potenza per effetto Joule perché il resistore quando passa la corrente *aumenta* la sua temperatura, cioè *assorbe* la potenza elettrica e la *converte* in calore. Il resistore quindi, proprio per questa sua caratteristica assorbente, sarà per noi il simbolo circuitale da adottare per modellare le trasformazioni di potenza da elettrica a qualche altra forma (termica, meccanica…).

**3.7 Passività**

Se assumiamo la convenzione degli utilizzatori su un bipolo, indicando con la tensione tra i suoi morsetti e con la corrente che lo interessa, diremo che il bipolo è passivo se l’energia ad esso associata risulta *positiva* nell’intervallo di tempo in cui monitoriamo l’energia stessa (intervallo che va da un *tempo remoto* , dove l’energia è nulla, a un determinato istante ):

Il resistore assorbe una potenza che è positiva avendo usato la convenzione degli utilizzatori, perciò è un *bipolo passivo*.

È possibile dimostrare che anche il condensatore è un *bipolo passivo*:

Cambiamo variabile passando a e fissando come nuovi estremi e :

Analogamente si può dimostrare per dualità che anche l’induttore è *passivo* perché: