**2. ELETTROTECNICA – Dalle leggi di Maxwell al modello a parametri concentrati**

Nella precedente lezione avevamo accennato alla necessità di convertire le grandezze vettoriali presenti nelle equazioni di Maxwell a grandezze scalari al fine di costruire un modello più semplice da applicare ai circuiti. Le grandezze scalari che useremo saranno l’intensità di corrente e la differenza di potenziale.

Riprendiamo le prime due equazioni di Maxwell (quelle sui rotori dei campi elettrici e magnetici) …

**2.1 Regime stazionario**

In che modo possiamo avere un campo conservativo nonostante ci sia la presenza di un campo magnetico indotto , sintomo di un campo non conservativo?

Quando è stazionario, ossia *costante nel tempo*, abbiamo che la derivata temporale è *nulla*:

Di conseguenza abbiamo che il rotore di è nullo anche in presenza di un campo magnetico. Analogamente nella seconda equazione di Maxwell il rotore del campo magnetico sarà uguale solo a se è stazionario. In simboli:

Dalla prima equazione ricaviamo che:

Mentre applicando l’operatore divergenza alla seconda equazione, e ricordando che la divergenza di un rotore è nulla, otteniamo:

E ciò vuol dire che il campo di densità di corrente di conduzione è diventato *solenoidale*, cioè non presenta né pozzi né sorgenti, ma linee di forza che si richiudono su se stesse.

Applicando il teorema di Stokes alla divergenza di abbiamo che il flusso di attraverso una superficie chiusa **S** è nullo:

Questa equazione indica che il flusso totale attraverso una qualsiasi superficie chiusa immersa in un campo solenoidale è nullo (il flusso entrante è uguale a quello uscente).

*N.B: è bene ricordare che le due equazioni (circuitazione del campo elettrico e divergenza della densità elettrica di conduzione) individuate sono valide SOLO in regime stazionario, ossia quando le derivate di tempo del campo elettrico e del campo magnetico sono rigorosamente nulle.*

**2.2 Principi di Kirchhoff**

Queste leggi permettono di esprimere le due equazioni di prima in termini di intensità di corrente e differenza di potenziale e constano di due principi: principio alle correnti e principio alle tensioni.

**2.2.1 Principio alle tensioni**

Partiamo dalla prima equazione derivante dalla stazionarietà del campo elettrico:

Prendiamo un qualsiasi percorso chiuso **λ** all’interno di un mezzo dove agisce un campo elettrostatico in condizioni di stazionarietà. Tale percorso può essere suddiviso in altri *n* sottopercorsi:

2

1

3

5

4

La circuitazione è esprimibile anche attraverso una sommatoria:

Dove la totalità del percorso **λ** è data dall’unione di tutti i percorsi . In simboli:

Se misuriamo con il voltmetro la d.d.p (differenza di potenziale) tra 1 e 2…tra 2 e 3….tra 3 e 4 e così via fino a completare il percorso, e ogni lettura effettuata la chiamiamo , possiamo scrivere:

*N.B: è importante FISSARE il verso di misura, cioè essere ordinati nello spostare i morsetti del voltmetro!*

L’ultima sommatoria esprime il principio alle tensioni: “dato un campo elettrostatico e stazionario la somma delle d.d.p. misurate su un qualsiasi percorso chiuso è nulla”.

*N.B: è più corretto per ora parlare di principio alle d.d.p, perché tensione e d.d.p non indicano esattamente la stessa cosa, ma il concetto di tensione è da estendere anche alle f.e.m (forze elettromotrici). In sintesi: la f.e.m genera la tensione e i suoi effetti sono ponderabili attraverso le d.d.p misurate col voltmetro.*

**2.2.2 Principio alle correnti**

Riprendiamo l’equazione:

Pensiamo ad esempio a un pallone di calcio suddiviso nelle classiche toppe esagonali e pentagonali, ognuna delle quali rappresenta una superficie chiusa . L’intera superficie **S** del pallone sarà quindi data dall’unione di tutte le :

Se ad ogni associamo un integrale di flusso di , abbiamo che:

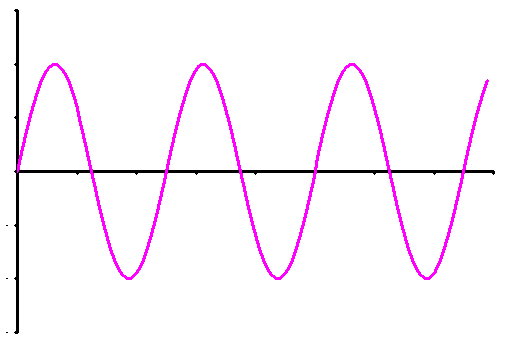
*N.B: è importante fissare il verso delle correnti: se le considero uscenti dal volume avranno segno positivo, altrimenti negativo.*

L’ultima sommatoria esprime il principio alle correnti: “dato un campo elettrostatico e stazionario la somma delle intensità di correnti su una qualsiasi superficie chiusa (misurate rispettando il verso della giacitura) è nulla”.

Questi due principi semplificano il problema, convertendo equazioni vettoriali in equazioni scalari. Ma queste semplificazioni valgono solo quando le derivate temporali sono nulle?

**2.3 PRINCIPI DI KIRCHHOFF NEL REGIME QUASI STAZIONARIO**

Per rispondere a questa domanda partiamo da una semplice osservazione empirica: se collego un voltmetro a una tipica presa da corrente e ne misuro l’andamento nel tempo della d.d.p, ottengo una *sinusoide*, dove la derivata temporale varia istante per istante:



E quindi abbiamo che . Questo implica che non tutti i sistemi elettrici possono essere tradotti in circuiti e che quindi devo cercare determinate caratteristiche in grado di individuare quali sistemi possono essere risolti con la teoria circuitale e quali necessitano dell’applicazione delle leggi di Maxwell senza approssimazioni.

Per fare ciò cominciamo a semplificare il problema ipotizzando delle *fluttuazioni sufficientemente* *lente* tali da restituire un regime quasi stazionario dove possiamo ancora permetterci di utilizzare il modello circuitale. In altre parole l’obiettivo della nostra indagine sarà trovare quel criterio in grado di dirci quale sistema elettrico posso studiare con il modello circuitale e quale no.

Riprendiamo il principio alle correnti di Kirchhoff…

Dato un filo lungo L, di materiale conduttore attraversato da una corrente “**i**” in regime stazionario (la corrente è continua), descrivo una superficie chiusa **S** che lascia all’esterno solo i morsetti A e B:

applicando il principio alle correnti:

A B

*N.B: la corrente ha segno negativo*

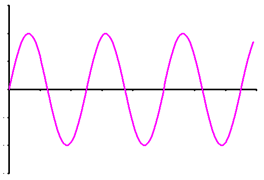
*perché uscente dal morsetto B*

Dal punto di vista fisico la corrente entrante in A per arrivare in B impiega un certo tempo. Tuttavia il principio alle correnti ci fa notare che se in modulo le due correnti sono uguali allora è come se il tempo impiegato fosse tendente a zero e, di conseguenza, la velocità di propagazione tendesse all’infinito.

In realtà la velocità di propagazione è quella della luce “c”, pari a 300000 Km/s.

Ora esprimiamo la corrente in forma sinusoidale:

Dal punto di vista matematico i termini tra parentesi rappresentano la “**x**” e il periodo della curva sinusoidale è “**2π**”, mentre dal punto di vista fisico è indicato con “**T**” con significato puramente temporale. Analogamente un punto della curva per un matematico rappresenta il valore di un angolo ESPRESSO IN RADIANTI, mentre per un fisico è un determinato tempo , espresso in secondi:



x / t

T

α/t\* 2π / T

Impostiamo la proporzione:

Il termine , dimensionalmente pari a rad/s, è un *fattore di conversione* perché di fatto risolve il problema della “dualità matematica/fisica”, dato che nell’ espressione della corrente l’argomento del seno va espresso in radianti. Tale fattore viene detto pulsazione e si indica con **ω**.

L’inverso del periodo **T** viene detto frequenza **f**, si misura in Hertz (**Hz**) e rappresenta il numero di cicli che vengono effettuati nel tempo T. Per esempio se effettuo un ciclo avrò:

E quindi la pulsazione può essere espressa anche come:

Siccome il **2π** è un numero adimensionale, anche la pulsazione ha le stesse unità di misura della frequenza. Per non confonderla con quest’ultima, quindi, la pulsazione non è espressa in Hz ma in .

La “**I**” posta davanti alla funzione seno rappresenta il valore di picco, ossia il massimo valore che posso misurare.

Il termine “”, infine, è un *fattore di correzione* che tiene conto della fase iniziale, ed è presente solo quando la sinusoide al tempo t=0 non parte dall’origine ma da un valore in ordinata (che con t=0 vale.

Tornando al nostro filo, possiamo ora esprimere in formule le correnti e :

Con “, che è il tempo impiegato dalla corrente nel passare da A a B, che può essere ricavato a partire dalla velocità di propagazione “c”:

*N.B: per semplicità, da A a B viene osservato il passaggio di UNA sola oscillazione qualsiasi della sinusoide.*

Se sostituiamo il ricavato all’espressione della corrente uscente da B otteniamo:

Se il termine cerchiato in rosso tende a zero, diventa trascurabile e quindi da B esce la stessa quantità che entra in A. Ciò vuol dire che posso usare il modello circuitale in campo quasi stazionario solo quando la quantità tende a zero.

Definiamo lunghezza d’onda , intesa come rapporto tra la velocità di propagazione del campo elettromagnetico (*proprietà del mezzo*) e la frequenza con cui sto eccitando la struttura (*proprietà della grandezza* che sta sollecitando il mezzo).

Quindi avremo un campo quasi stazionario analizzabile con il modello circuitale quando e cioè quando è molto più grande della massima lunghezza del dispositivo elettrico (.

Vediamo alcuni esempi:

1. f = 50 Hz

se la dimensione del filo con cui trasmetto la corrente elettrica è 30 m (come ad esempio nell’impianto elettrico di una stanza), e quindi possiamo usare il modello circuitale.

Se L fosse 3000 km (come ad esempio nelle linee che trasportano l’energia elettrica attraverso grandi estensioni territoriali), quindi confrontabile con , non posso adoperare uno schema circuitale banale ma avremo bisogno dei parametri concentrati, di cui parleremo più avanti.

1. f =50 KHz

se trasmetto un segnale a 50 KHz (ultrasuoni) con un filo di 30 m, non posso più modellare un circuito, perché il comincerebbe a non essere più trascurabile.

1. f = 50 MHz (trasmissioni radio)
2. f = 50 GHz (computer)

se devo effettuare la circuiteria di un computer non posso avere lunghezze dei dispositivi troppo elevate.

**2.4 Modelli a parametri concentrati**

Le approssimazioni effettuate finora prevedono *tempi di trasmissione nulli* (quindi ho circuiti con *ritardi nulli*: quello che succede all’estremità del dispositivo, si ripete uguale all’altra estremità) con *velocità di propagazione infinite* e di conseguenza anche *dimensioni nulle*. Quindi, quando tradurremo in schema circuitale il circuito reale, esso non avrà dimensioni.

Per risolvere il problema dell’adimensionalità dei dispositivi sottoposti a fenomeni elettromagnetici in regime quasi stazionario, le caratteristiche geometriche di tali strutture andranno a finire nel valore del parametro associato al dispositivo, che prende il nome di parametro concentrato.

Esempi di parametri concentrati sono: la resistenza di un *resistore*, la capacità di un *condensatore*, l’induttanza di un *induttore*. A monte, però, c’è tutta un’analisi da effettuare sul dispositivo al fine di individuare quali sono i suoi valori di resistenza, di capacità e di induttanza; una volta individuati i valori dei parametri si prosegue con la schematizzazione del circuito.

Riprendiamo le leggi costitutive del mezzo:

Un dispositivo reale abbiamo già visto che non può essere sollecitato da un solo tipo di mezzo. Per tradurre in termini circuitali tale limitazione *decomponiamo* la struttura elettrica reale in tanti *dispositivi ideali* che nell’insieme descrivono cosa avviene a livello macroscopico nella realtà. Parleremo quindi di condensatori ideali (puramente dielettrici), induttori ideali (puramente magnetici) e resistori ideali (puramente conduttori).

Nello schema circuitale a ogni dispositivo decomposto è associata una regione materiale, che colloquia con il circuito tramite dei morsetti, o superfici equipotenziali, dove si possono collegare i puntali del voltmetro e dove il campo è elettrostatico.

*N.B: lungo le superfici equipotenziali misuro una d.d.p nulla.*

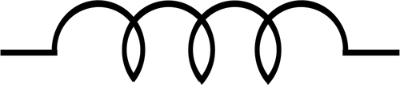
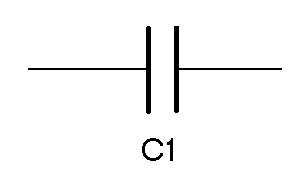
**2.4.1 Resistori, induttori e condensatori**

Definiamo la velocità di propagazione nel vuoto come:

dove: = permeabilità magnetica nel vuoto

= permettività elettrica nel vuoto

A seconda della presenza o meno dei valori e avremo:

* resistori **R** se 
* induttori **L** se e 
* condensatori **C** se e 

*N.B.: se rispetto alla tipologia della struttura il campo magnetico varia velocemente non c’è interazione con il campo elettrico e viceversa. Se sono presenti sia che allora dobbiamo tenere presente entrambi i campi e i relativi effetti.*

I vari dispositivi ideali vanno combinati in modo tale da simulare la situazione che ho nella realtà: se ad esempio abbiamo un filo attraversato da corrente e il mezzo che attraversa ha una permeabilità magnetica elevata, vuol dire che l’intensità del campo magnetico non è trascurabile, ma anzi, è tale da dover rendere necessario l’inserimento di un induttore a simulare tale fenomeno.

A questo punto se le caratteristiche dei mezzi diversi da quello del vuoto vengono inglobate nelle regioni materiali, vuol dire che l’intero schema circuitale è “immerso” nel vuoto (che viene denominato vuoto circuitale).

**2.4. Generatori di forza elettromotrice ideali**

Altri dispositivi ideali sono i generatori di f.e.m (forza elettromotrice), ossia quelle strutture che generano campi e a partire da una sorgente non elettrica (ad esempio il campo elettromotore delle batterie che genera energia elettrica a partire da una fonte chimica).

Anche i generatori sono descritti da parametri concentrati. Esistono generatori di tensione e generatori di corrente:

*N.B: la punta della freccia indica il polo positivo “+”,*

Generatore di tensione *importante per capire con quale segno considerare*

ideale *la tensione generata*

Generatore di corrente

ideale

*N.B: queste due tipologie di generatori sono detti* ***indipendenti*** *perché la tensione e la corrente da essi generate non dipendono da quello che accade nel resto del circuito.*