13. ELETTROTECNICA

POTENZA IN REGIME PERMANENTE SINUSOIDALE: ISTANTANEA, ATTIVA E FLUTTUANTE

Definiamo la potenza istantanea come:

$$p(t) = v(t)\, i(t)$$

Dove:

$$v(t) = \frac{\bar{V}\, e^{j\omega t} - \bar{V}^* e^{-j\omega t}}{2j} \qquad (forma\ euleriana)$$

Per risalire alla forma canonica impostiamo:

$$\bar{V} = V_M e^{j\gamma}$$

Da cui:

$$v(t) = V_M \sin(\omega t + \gamma) \qquad (forma\ canonica)$$

Stesse espressioni possiamo adottare per la corrente:

$$i(t) = \frac{\bar{I}\, e^{j\omega t} - \bar{I}^* e^{-j\omega t}}{2j} \qquad (forma\ euleriana)$$

$$\bar{I} = I_M e^{j\beta}$$

$$i(t) = I_M \sin(\omega t + \beta) \qquad (forma\ canonica)$$

Lo sfasamento tra tensione e corrente è espresso tramite:

$$\varphi = \gamma - \beta$$

Sostituendo nell'equazione della potenza istantanea otteniamo:

$$p(t) = \left(\frac{\bar{V}\, e^{j\omega t} - \bar{V}^* e^{-j\omega t}}{2j}\right)\left(\frac{\bar{I}\, e^{j\omega t} - \bar{I}^* e^{-j\omega t}}{2j}\right) = \frac{\bar{V}\ \ \bar{I}\ e^{2j\omega t} - \bar{V}\ \ \bar{I}^* - \bar{V}^*\ \ \bar{I} + \bar{V}^*\ \ \bar{I}^*\, e^{-2j\omega t}}{-4} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\bar{V}\ \ \bar{I}^* + \bar{V}^*\ \ \bar{I}\right) - \frac{1}{4}\left(\bar{V}\ \ \bar{I}\ e^{2j\omega t} + \bar{V}^*\ \ \bar{I}^*\, e^{-2j\omega t}\right)$$

Dove in rosso è stata evidenziata la parte *costante* dell'equazione, mentre in verde quella *variabile* nel tempo. È bene ricordare che la potenza è una grandezza reale e misurabile in Watt, per cui le due parti dovranno restituirci alla fine un'espressione reale anche se per ora sono composte anche da numeri complessi. Analizziamo singolarmente le due parti:

PARTE COSTANTE

$$\frac{1}{4}\left(V_M e^{j\gamma} I_M e^{-j\beta} + V_M e^{-j\gamma} I_M e^{j\beta}\right) = \frac{1}{4}\left(V_M\, I_M e^{j\varphi} + V_M\, I_M e^{-j\varphi}\right)$$

Portando ½ dentro le parentesi e fuori $V_M I_M$:

$$\frac{V_M I_M}{2}\left(\frac{e^{j\varphi}+e^{-j\varphi}}{2}\right)=\frac{1}{2}V_M I_M \cos\varphi$$

Dove $\cos\varphi$ prende il nome di fattore di potenza (o per i tecnici semplicemente "cos fi") e φ è lo sfasamento tra tensione e corrente, che coincide con l'argomento dell'impedenza $\dot{Z}$ solo quando la rete è passiva.

PARTE VARIABILE NEL TEMPO

$$\frac{1}{4}\left(V_M e^{j\gamma} I_M e^{j\beta} e^{2j\omega t}+V_M e^{-j\gamma} I_M e^{-j\beta} e^{-2j\omega t}\right)=\frac{1}{4}\left(V_M I_M e^{j(\gamma+\beta+2\omega t)}+V_M I_M e^{-j(\gamma+\beta+2\omega t)}\right)$$

Portando ½ dentro le parentesi e fuori $V_M I_M$:

$$\frac{V_M I_M}{2}\left(\frac{e^{j(\gamma+\beta+2\omega t)}+e^{-j(\gamma+\beta+2\omega t)}}{2}\right)=\frac{1}{2}V_M I_M \cos(\gamma+\beta+2\omega t)$$

Sostituendo le due parti nell'espressione della potenza istantanea abbiamo che:

$$p(t)=\frac{1}{2}V_M I_M \cos\varphi-\frac{1}{2}V_M I_M \cos(\gamma+\beta+2\omega t)$$

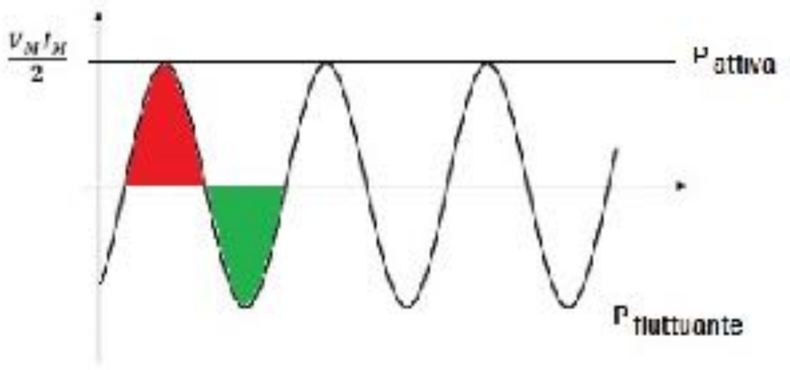
Dove in rosso è stata evidenziata la potenza attiva e in verde la potenza fluttuante.

Per capire meglio i concetti di potenza attiva e fluttuante prendiamo un esempio pratico come la serpentina di uno scaldabagno che con grande approssimazione può essere assimilata a un resistore.

La serpentina assorbe l'energia elettrica e la converte in calore per riscaldare l'acqua. Come abbiamo visto in precedenza, i fasori corrente e tensione in un resistore non sono sfasati per cui $\cos\varphi = \cos 0 = 1$ e quindi la potenza attiva sarà semplicemente:

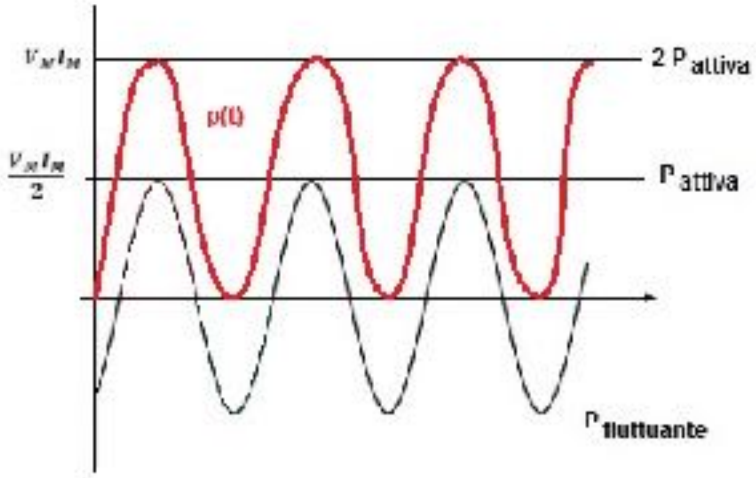
$$\frac{1}{2}V_M I_M$$

La potenza fluttuante, invece, possiede un andamento oscillatorio in cui il massimo valore coincide con la potenza attiva e la frequenza è il doppio di quella di rete ($2\omega t$).
Rappresentiamo su un grafico le due funzioni della potenza:



Le zone, campite in rosso, che si trovano sull'asse positivo delle ordinate sono quegli intervalli di tempo in cui viene assorbita potenza che quindi si va ad aggiungere alla potenza attiva (dato che l'argomento del coseno è tale da renderlo complessivamente negativo); le zone in verde, invece corrispondono a quegli intervalli di tempo in cui viene generata potenza che si va a sottrarre a quella attiva.

Le zone in verde, in particolare, quando effettueremo la somma tra le due potenze per trovare l'andamento della potenza globale dovranno scomparire perché un resistore è incapace di generare potenza. Per ottenere l'andamento della potenza istantanea dovremo sommare, istante per istante, i valori delle due curve:



Come si nota dal grafico sopra, nei punti in cui la potenza fluttuante ha il picco minimo, quando sommiamo la potenza attiva (avente lo stesso modulo del valore negativo), la potenza istantanea risulta nulla; nei punti in cui la potenza fluttuante presenta un massimo, la potenza istantanea risulterà due volte la potenza attiva; infine, nei punti dove la potenza fluttuante è nulla, la potenza istantanea ha solo la potenza attiva come contributo.

Quindi allo scaldabagno somministriamo una potenza che è sempre positiva, ma oscillante nel tempo: per capire l'effettiva quantità di potenza fornita dal generatore e assorbita dal resistore occorre calcolare il valor medio della potenza istantanea:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt$$

Con **T** = periodo oscillazione (che è lo stesso se preso sulla corrente, sulla tensione, sulla potenza fluttuante o su quella attiva)

Se effettuiamo il valor medio sulla potenza attiva esso coincide con il modulo della potenza attiva stessa perché la funzione è costante per tutto il tempo **T**; mentre se facciamo il valor medio della potenza fluttuante ci accorgiamo che è nullo perché durante il periodo **T** abbiamo due curve uguali e opposte che forniscono due integrali uguali e opposti la cui somma è zero. Possiamo quindi affermare che il valor medio della potenza istantanea coincide con il valor medio della potenza attiva e quindi se andiamo a considerare il bilancio macroscopico di quanta energia viene trasferita dai generatori agli utilizzatori avremo che:

$$P = \frac{1}{2} V_M I_M \cos\varphi$$

Che rappresenta la potenza attiva reale scambiata tra un generatore e un utilizzatore.

IL VALORE EFFICACE

Se osserviamo dei dati di targa, ossia delle informazioni che certificano i livelli di funzionamento dei dispositivi elettrici, possiamo trovare il livello di tensione fissato ad esempio a 220-230 V. Ma a cosa corrispondono questi valori? Dato che l'andamento della tensione è sinusoidale, ci si aspetterebbe che il dato fornito corrisponda al valore di picco. Tuttavia se misuriamo la tensione l'oscilloscopio rileva un picco che è circa $\sqrt{2}$ volte maggiore di 230 V (circa il 40% più alto). Vediamo perché proprio $\sqrt{2}$…

Immaginiamo di voler far funzionare uno scaldabagno invece che con la corrente alternata di casa da 230 $\sqrt{2}$ V, con una serie di batterie da 12 V in corrente continua. Per garantire gli stessi effetti che lo scaldabagno aveva in casa le due potenze che lo alimentano dovranno essere uguali:

$$\textit{\textbf{potenza in corrente continua}} = \textit{\textbf{potenza in corrente alternata}}$$

$$R\, I_{DC}^{\;2} = \frac{1}{2} V_M\, I_M \cos\varphi$$

Dove I_{DC} è la corrente in continua, $\cos\varphi = 1$, perché nel resistore corrente e tensione sono in fase, e $V_M = R\, I_M$. Otteniamo:

$$R\, I_{DC}^{\;2} = \frac{1}{2} R\, I_M^{\;2} \quad \Rightarrow \quad I_{DC}^{\;2} = \frac{1}{2} I_M^{\;2} \quad \Rightarrow \quad I_{DC} = \frac{I_M}{\sqrt{2}}$$

Va notato che sopra abbiamo di fatto messo a sistema potenza attiva in continua e potenza attiva in alternata. Scritto in forma generale (cioè anche per altri tipi di andamenti non per forza sinusoidali):

$$R\, I_{DC}^{\;2} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt \quad \Rightarrow \quad R\, I_{DC}^{\;2} = \frac{1}{T}\int_0^T R\, i^2(t)dt \quad \Rightarrow \quad I_{DC} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt} = I_{eff}$$

I_{DC} prende il nome di valore efficace, o RMS (Root Mean Square), che sarebbe il valore che dovrebbe avere la corrente continua (ma si può trovare anche quello della tensione usando la formula della potenza in funzione della tensione) per ottenere gli stessi effetti con corrente alternata. Tutti i dispositivi sono tarati con il valore efficace.

VANTAGGI DEL VALORE EFFICACE

L'uso del valore efficace al posto del valore di picco semplifica il calcolo per esempio della potenza attiva, che diventa:

$$P = \frac{1}{2} V_M\, I_M \cos\varphi = \frac{1}{2} V_{eff}\sqrt{2}\; I_{eff}\sqrt{2}\cos\varphi = V_{eff}\, I_{eff}\cos\varphi$$

*<u>N.B.</u>: d'ora in poi, per semplicità di scrittura indicheremo con una semplice **V** il valore assoluto del valore efficace della tensione* V_{eff} *(stesso discorso per* I_{eff}*). Avremo quindi:*

$$\bar{V} = V_{eff}\, e^{j\gamma} \quad \Rightarrow \quad \bar{V} = V\, e^{j\gamma}$$

$$\bar{I} = I_{eff}\, e^{j\beta} \quad \Rightarrow \quad \bar{I} = I\, e^{j\beta}$$

POTENZA COMPLESSA (O APPARENTE)

L'uso dei fasori permette di arrivare alla definizione della potenza attiva in maniera più rapida. Mettiamo di conoscere i fasori delle correnti e delle tensioni di lato del nostro circuito; la potenza attiva può essere così individuata:

$$P = Re\left\{ \bar{V}\ \ \bar{I}^* + \bar{V}^*\ \ \bar{I}\ \right\}$$

Sviluppiamo il termine tra parentesi graffe:

$$\bar{V}\ \ \bar{I}^* + \bar{V}^*\ \ \bar{I} = \left(V\, e^{j\gamma}\, I\, e^{-j\beta}\right) + \left(V\, e^{-j\gamma}\, I\, e^{j\beta}\right) = \left(V\, I\, e^{j(\gamma-\beta)}\right) + \left(V\, I\, e^{j(\beta-\gamma)}\right) =$$

$$\left(V\, I\, e^{j\varphi}\right) + \left(V\, I\, e^{-j\varphi}\right) = V\, I\, (\cos\varphi + j\sin\varphi) + V\, I\, (\cos\varphi - j\sin\varphi) = 2\, V\, I\, \cos\varphi$$

Notiamo che il risultato coincide con il *doppio* della potenza attiva e quindi per trovare la potenza attiva reale possiamo scegliere se effettuare il prodotto $\bar{V}\ \ \bar{I}^*$ oppure $\bar{V}^*\ \ \bar{I}$:

$$P = Re\left\{ \bar{V}\ \ \bar{I}^* \right\} = V\, I\, \cos\varphi$$

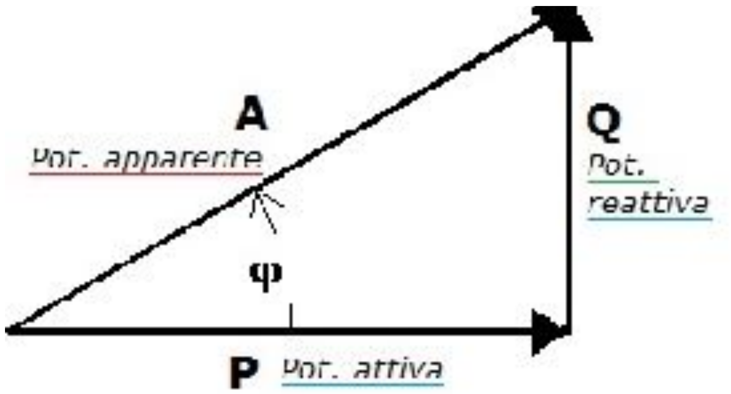
Grazie alla quale è possibile ricavare subito l'angolo di sfasamento φ:

$$Re\left\{ \bar{V}\ \ \bar{I}^* \right\} = V\, I\, \cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \frac{Re\left\{ \bar{V}\ \ \bar{I}^* \right\}}{V\, I} = \cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi = arccos\left(\frac{Re\left\{ \bar{V}\ \ \bar{I}^* \right\}}{V\, I}\right)$$

Il prodotto $\bar{V}\ \ \bar{I}^*$ prende il nome di potenza complessa che indichiamo con $\bar{A}$. La potenza complessa per definizione è composta da una parte reale, che abbiamo visto essere la potenza attiva, e da una parte immaginaria, detta potenza reattiva, che indichiamo con Q. In definitiva:

$$\bar{A} = P + jQ$$

Che se rappresentato sul piano di Gauss dà luogo al triangolo delle potenze:



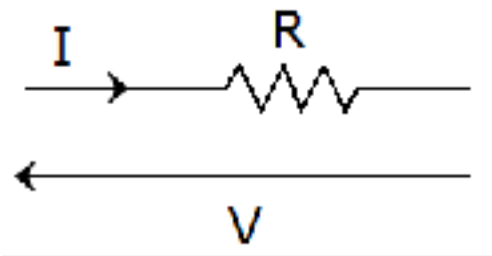
E il cui modulo risulta:

$$\left|\bar{A}\right| = \sqrt{P^2 + Q^2} = V\, I$$

Dove $\boldsymbol{V}\,\boldsymbol{I}$ non è nient'altro che la lettura rispettivamente del voltmetro, col quale misuro la tensione efficace, e dell'amperometro, col quale misuro la corrente efficace. Il loro prodotto però non è la potenza reale perché va considerato il fattore di potenza "cos fi"; solo se abbiamo un resistore puro allora la potenza è pari proprio a $\boldsymbol{V}\,\boldsymbol{I}$ misurate perché il fattore di potenza sarà uguale a uno e il modulo di $\bar{\boldsymbol{A}}$ coinciderà con **P**. Per questo la potenza complessa è detta anche potenza apparente perché il prodotto tra i valori efficaci di tensione e corrente restituisce un valore che non coincide con la potenza reale; inoltre, proprio perché questa potenza non è reale, le sue unità di misura non sono espresse dai Watt bensì da voltampère (mentre la potenza reattiva, anch'essa immaginaria, ha come unità di misura i var, ossia voltampère reattivi).

Analizziamo cosa succede alla potenza apparente nei vari bipoli:

RESISTORE



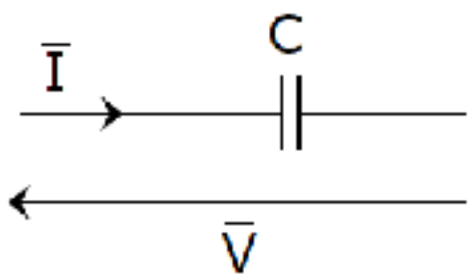
R nel disegno è l'impedenza: nel caso in figura coincide con la sola parte reale e cioè con la resistenza. Tensione e corrente nel resistore sono in fase, per cui:

$$\varphi = 0$$

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{V}\,\boldsymbol{I}\cos\varphi = \boldsymbol{V}\,\boldsymbol{I} = \left|\bar{A}\right|$$

$$\boldsymbol{Q} = 0$$

CONDENSATORE



Il valore dell'impedenza del condensatore è:

$$\dot{Z} = -\frac{j}{\omega C} = \frac{1}{\omega C}\,e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

Per cui:

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}$$

$$P = V\,I\,\cos\varphi = 0$$

Anche se la potenza attiva è nulla i termini ***V*** e ***I*** esistono e i loro fasori valgono:

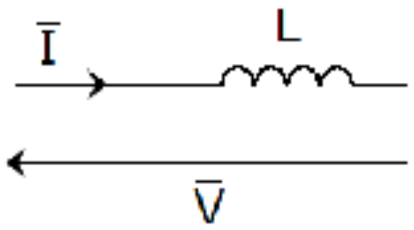
$$\bar{V} = \dot{Z}\,\bar{I}$$

$$\bar{I} = j\omega C\,\bar{V}$$

La potenza apparente, composta quindi solo da **Q**, è facilmente ottenibile sfruttando il triangolo delle potenze:

$$Q = Im\left\{\ \bar{V}\ \ \bar{I}^*\right\} = V\,I\,\sin\varphi = V\,I = \left|\bar{A}\ \right|$$

INDUTTORE



Il valore dell'impedenza dell'induttore è:

$$\dot{Z} = j\omega L = \ \omega L\,e^{j\frac{\pi}{2}}$$

Per cui:

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$P = V\,I\,\cos\varphi = 0$$

Anche se la potenza attiva è nulla i termini ***V*** e ***I*** esistono e i loro fasori valgono:

$$\bar{V} = \dot{Z}\,\bar{I}$$

$$\bar{I} = j\omega L\,\bar{V}$$

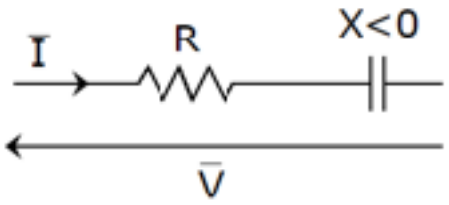
La potenza apparente, composta quindi solo da **Q**, è:

$$Q = Im\left\{\ \bar{V}\ \ \bar{I}^*\right\} = V\,I\,\sin\varphi = V\,I = \left|\bar{A}\ \right|$$

Nei casi promiscui, invece, la potenza apparente assume la sua forma generale:

$$\bar{A} = P + jQ = V\,I\,(\cos\varphi + j\sin\varphi)$$

LATO OHMICO-CAPACITIVO



$$\bar{V} = \dot{Z}\,\bar{I} = \left(R + jX\right)\bar{I} \qquad con\;\; X = -\frac{j}{\omega C}$$

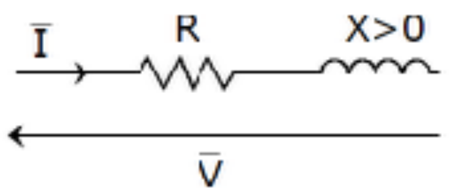
$$\bar{A} = \bar{V}\;\bar{I}^* = \left(R + jX\right)\bar{I}\;\bar{I}^* = \left(R + jX\right)\left|\bar{I}\right|^2 = R\left|\bar{I}\right|^2 + j\,X\left|\bar{I}\right|^2 = P + jQ$$

Con **P** positiva e **Q** negativa; quindi nel caso ohmico-capacitivo l'impedenza assorbe potenza attiva e eroga potenza reattiva. La presenza di un elemento passivo quale è il resistore, che in teoria non potrebbe erogare potenza, non ci fa cadere in contraddizione perché la potenza reattiva è per definizione inesistente perché immaginaria.

N.B.: ricordiamo che il prodotto tra due numeri complessi coniugati è pari al modulo del complesso al quadrato:

$$\left(a + jb\right)\left(a - jb\right) = \left(\sqrt{a^2 + b^2}\;e^{j\alpha}\right)\left(\sqrt{a^2 + b^2}\;e^{-j\alpha}\right) = a^2 + b^2$$

LATO OHMICO-INDUTTIVO

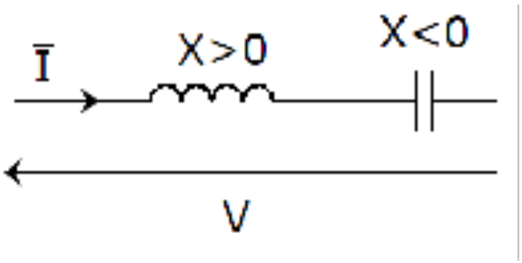


$$\bar{V} = \dot{Z}\,\bar{I} = \left(R + jX\right)\bar{I} \qquad con\;\; X = \omega L$$

$$\bar{A} = \bar{V}\;\bar{I}^* = \left(R + jX\right)\bar{I}\;\bar{I}^* = \left(R + jX\right)\left|\bar{I}\right|^2 = R\left|\bar{I}\right|^2 + j\,X\left|\bar{I}\right|^2 = P + jQ$$

Con **P** e **Q** entrambi positivi; quindi nel caso ohmico-induttivo l'impedenza assorbe sia potenza attiva che reattiva.

LATO CAPACITIVO-INDUTTIVO



Globalmente uno dei due dispositivi prevale sull'altro; tuttavia se stiamo in *risonanza* la potenza reattiva viene ceduta dal condensatore all'induttore o viceversa. L'assenza di potenza attiva e la presenza di sola potenza reattiva in regime permanente sinusoidale fa sì che nel processo di conversione energetica, l'energia rimane intrappolata nel circuito e non colloquia con l'esterno a meno che non venga inserito un resistore che è in grado di trasformarla.

UTILITÁ DELLA POTENZA APPARENTE

È dunque possibile analizzare le caratteristiche fondamentali di un circuito senza fare ricorso all'impedenza perché con gli strumenti di misura possiamo stimare la corrente che circola nella rete (valore efficace della corrente I) con un amperometro; la tensione (valore efficace **V**) con un voltmetro; e la potenza attiva con un wattmetro. Con questi dati alla mano è possibile ricavare la potenza apparente, facendo il prodotto tra i valori efficaci, la potenza reattiva, i fasori della corrente e della tensione e persino il loro sfasamento perché, riprendendo il triangolo delle potenze, si ricava la seguente relazione:

$$\cos\varphi = \frac{P}{VI} = \frac{P}{|\bar{A}|}$$

POTENZA FLUTTUANTE E VIBRAZIONI

Esistono dei sistemi detti polifase, dei quali quello più usato nelle applicazioni è il trifase, in cui in particolari situazioni è possibile annullare la potenza fluttuante. Per capire se ciò è un vantaggio o uno svantaggio partiamo da un esempio pratico…

Mettiamo di dover alimentare con corrente alternata il motore elettrico di una motozappa con corrente alternata: esso può essere rappresentato da un modello circuitale i cui due morsetti accessibili sono inseriti nella presa. A questo punto possiamo misurare la tensione e la corrente, che avranno andamento sinusoidale, e la potenza, misurata con un wattmetro dinamico, il quale rileva una parte costante e una fluttuante: la parte costante (potenza attiva) consiste nella vera e propria conversione dell'energia elettrica in meccanica e ci dice con quanta potenza la motozappa sta scavando nel terreno; la parte fluttuante è sempre energia elettrica che viene convertita in meccanica, ma corrisponde alle cosiddette vibrazioni, cioè a una specie di "sbalzi" nella potenza che rende eterogeneo il movimento.

Per intenderci… se un dispositivo elettrico fosse adibito a tracciare dei cerchi: se il sistema fosse monofase si avrebbe presenza di vibrazioni e quindi la linea della circonferenza risulterebbe "tremolante", non omogenea; se fosse trifase ci sarebbe assenza di vibrazioni e quindi di imperfezioni sulla circonferenza. Altro indice di presenza di vibrazioni è la *rumorosità*: un motorino alimentato con sistema monofase farà molto più rumore di un ascensore alimentato con trifase. Nello scaldabagno, invece, è inutile adottare un sistema trifase perché le vibrazioni non influiscono sulla temperatura dell'acqua.