# 10. ELETTROTECNICA

Riprendiamo il discorso sulla risposta di un circuito RLC…

La parte reale delle soluzioni $\alpha_1$ e $\alpha_2$ (sia per Δ<0 che per Δ>0) ha caratteristiche smorzanti e perciò le due soluzioni per $i\,(t)$ con $t \to \infty$ tendono ad *estinguersi*. La parte immaginaria delle soluzioni, invece, ha caratteristiche oscillanti (forma sinusoidale).

Per trovare $k_1$ e $k_2$ mettiamo a sistema le condizioni iniziali:

$$v_c(0) = k_1 + k_2 + E$$

$$i(0) = C\alpha_1 k_1 + C\alpha_2 k_2$$

Che, risolto in forma matriciale, ci permette di ricavare le condizioni generali:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ C\alpha_1 & C\alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_c(0) - E \\ i(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{C\left(\alpha_2 - \alpha_1\right)} \begin{bmatrix} C\alpha_2 & -1 \\ -C\alpha_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c(0) - E \\ i(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{C\alpha_2\left(v_c(0) - E\right) - i(0)}{C\left(\alpha_2 - \alpha_1\right)} \\ \dfrac{i(0) - C\alpha_1\left(v_c(0) - E\right)}{C\left(\alpha_2 - \alpha_1\right)} \end{bmatrix}$$

Se al tempo **t=0** ipotizziamo condensatore e induttore scarichi allora $i(0) = 0$ e $v_c(0) = 0$; e quindi il sistema matriciale sarà:

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{C\alpha_2(-E)}{C\left(\alpha_2 - \alpha_1\right)} \\ \dfrac{-C\alpha_1(-E)}{C\left(\alpha_2 - \alpha_1\right)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\alpha_2 E}{\left(\alpha_1 - \alpha_2\right)} \\ \dfrac{\alpha_1 E}{\left(\alpha_2 - \alpha_1\right)} \end{bmatrix}$$

**CASO 1**

Se il determinante fosse stato positivo:

$$\alpha_1 = -\sigma + \sqrt{\Delta}$$

$$\alpha_2 = -\sigma - \sqrt{\Delta}$$

Ponendo $\alpha_1 - \alpha_2 = 2\sqrt{\Delta}$ le incognite **k** diventano:

$$k_1 = \frac{\alpha_2 E}{(\alpha_1 - \alpha_2)} = \frac{-\sigma - \sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} E \quad < 0$$

$$k_2 = \frac{\alpha_1 E}{(\alpha_1 - \alpha_2)} = \frac{-\sigma + \sqrt{\Delta}}{-2\sqrt{\Delta}} E \quad > 0$$

Come nei circuiti RC e RL affrontati nella precedente lezione, anche qui dobbiamo controllare che i termini che compaiono nell'argomento degli esponenziali siano adimensionali quando saranno moltiplicati per il tempo:

$$\left[\frac{R}{2L}\right] = \frac{V}{A}\frac{1}{(V\,s)/A} = \frac{V}{A}\frac{A}{V\,s} = \frac{1}{s}$$

$$[\,\Delta\,] = \left[\frac{1}{LC}\right] = \frac{1}{(V\,s)/A}\,\frac{1}{(A\,s)/V} = \frac{A}{V\,s}\frac{V}{s} = \frac{1}{s^2} \qquad \Rightarrow \qquad \left[\sqrt{\Delta}\right] = \frac{1}{s}$$

## ANDAMENTO DELLA CORRENTE

Tracciamo ora l'andamento della corrente in funzione del tempo:

$$i(t) = C\alpha_1 k_1 e^{\alpha_1 t} + C\alpha_2 k_2\, e^{\alpha_2 t}$$

Studiamo i singoli membri a destra dell'equazione e poi li sommiamo per ottenere l'andamento qualitativo della corrente.

Per $t = 0$ otteniamo due punti sull'asse delle ordinate uguali, perché per ipotesi $i(t) = 0$, e opposti:

$$C\alpha_1 k_1 > 0 \qquad (C > 0,\ \alpha_1 < 0,\ k_1 < 0)$$

$$C\alpha_2 k_2 < 0 \qquad (C > 0,\ \alpha_2 < 0,\ k_1 > 0)$$

Per $t \to \infty$ i due termini tendono a zero, ma, per capire il "come" ci vanno, bisogna studiare le costanti di tempo:

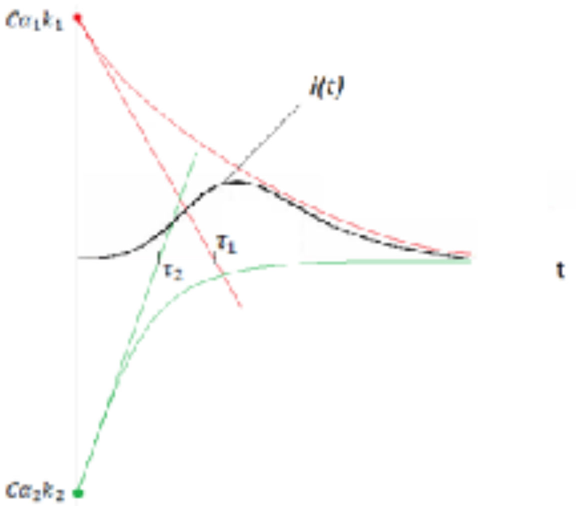
$$\alpha_1 = -\sigma + \sqrt{\Delta} \qquad \Rightarrow \qquad \tau_1 = \frac{1}{\alpha_1}$$

$$\alpha_2 = -\sigma - \sqrt{\Delta} \qquad \Rightarrow \qquad \tau_2 = \frac{1}{\alpha_2}$$

Da cui scopriamo che l'andamento è quello di un iperbole e che:

$$|\alpha_1| < |\alpha_2| \qquad \Rightarrow \qquad |\tau_1| > |\tau_2|$$

Tracciando le tangenti passanti per i punti sull'asse delle ordinate e per le tau possiamo tracciare l'andamento dei due termini che, sommati tra loro, ci forniranno la curva della corrente:




**CASO 2**

Se il determinante fosse stato negativo otteniamo due soluzioni complesse e coniugate:

$$\alpha_1 = -\sigma + j\omega$$

$$\alpha_2 = -\sigma - j\omega$$

Ponendo $\alpha_1 - \alpha_2 = 2j\omega$ (con $\omega = \sqrt{|\Delta|} > 0$) le incognite **k** diventano:

$$k_1 = \frac{-\sigma - j\omega}{2j\omega}E$$

$$k_2 = \frac{-\sigma + j\omega}{-2j\omega}E$$

**PASSAGGIO DA FORMA CARTESIANA A EULERIANA**

Se vogliamo passare alla forma cartesiana dobbiamo eliminare il numero complesso al denominatore moltiplicando numeratore e denominatore per $j$ (da qui in avanti indicheremo i numeri coniugati con il simbolo asterisco "*"):

$$k_1 = \frac{-\sigma j - j^2\omega}{2j^2\omega}E = \frac{-\sigma j + \omega}{-2\omega}E = \left(\frac{\sigma}{2\omega}j - \frac{1}{2}\right)E$$

$$k_1 = k* = \frac{-\sigma j + j^2\omega}{-2j^2\omega}E = \frac{-\sigma j - \omega}{2\omega}E = \left(-\frac{\sigma}{2\omega}j - \frac{1}{2}\right)E$$

Ma se come abbiamo visto in precedenza:

$$\alpha_2 = \alpha_1{}^*$$

$$k_2 = k_1{}^*$$

Allora possiamo scrivere:

$$C\alpha_1 k_1 = A$$

$$C\alpha_2 k_2 = A*$$

E quindi:

$$i(t) = C\alpha_1 k_1 e^{\alpha_1 t} + C\alpha_2 k_2\, e^{\alpha_2 t} = A\, e^{\alpha_1 t} + A^*\, e^{\alpha_2 t}$$

Proviamo a metterle in forma euleriana:

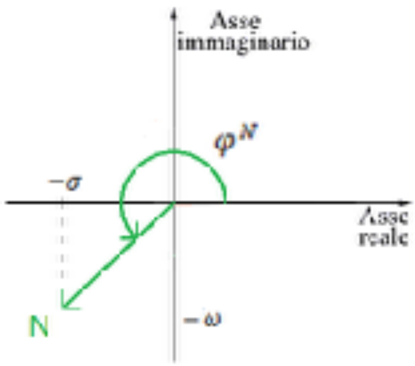
$$k_1 = \left|k_1\right| \; e^{j\varphi}$$

Dove $\varphi$ è l'argomento del numero complesso.

$$\left|k_1\right| = \frac{\left|-\sigma j + \omega\right|}{\left|-2\omega\right|} = \frac{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2}}{2\omega}$$

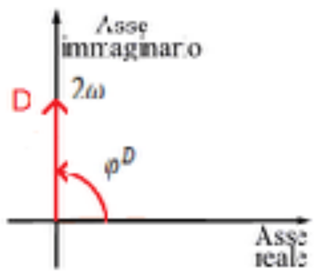
Per trovare l'argomento $\varphi$ studio separatamente numeratore (**N**) e denominatore (**D**) di $k_1$:

$$k_1 = \frac{-\sigma - j\omega}{2j\omega} = \frac{N}{D}$$




$$N = -\,\sigma - j\omega \qquad \Rightarrow \qquad \varphi^N = arctg\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) + \pi$$

*<u>N.B.</u>: l'argomento dell'arcotangente è il rapporto tra la parte immaginaria e la parte reale del numeratore; aggiungiamo π perché* $\sigma < 0$.




$$D = 2j\omega \qquad \Rightarrow \qquad \varphi^D = \frac{\pi}{2}$$

Quindi:

$$k_1 = \left|k_1\right| \; e^{j\varphi} = \frac{\sqrt{\sigma^2+\omega^2}}{2\omega} \; \frac{e^{j\varphi^N}}{e^{j\varphi^D}}$$

Dove il rapporto:

$$\frac{e^{j\varphi^N}}{e^{j\varphi^D}} = \; e^{j(\varphi^N - \varphi^D)} = \; e^{j(arctg\frac{\omega}{\sigma}+\frac{\pi}{2})}$$

*N.B.: in forma euleriana due numeri sono coniugati se hanno lo stesso modulo ma argomento cambiato di segno.*

## SCHEMA RIASSUNTIVO PER IL PASSAGGIO DA NUMERI COMPLESSI A ESPONENZIALI

Dato un numero complesso in forma algebrica: $z = a + jb$

Per passare alla forma esponenziale: $z = r\, e^{j\varphi}$

Basta calcolare: $r = \sqrt{a^2+b^2}$

E l'argomento $\varphi$:

$$\varphi \quad \begin{cases} \frac{\pi}{2} \text{ se } a = 0,\ b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} \text{ se } a = 0,\ b < 0 \\ \text{non definito se } a = 0,\ b = 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \text{ se } a > 0, b \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + 2\pi \text{ se } a > 0,\ b < 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi \text{ se } a < 0,\ \text{b qualsiasi} \end{cases}$$

## ANDAMENTO DELLA CORRENTE

Ricapitolando possiamo scrivere le incognite k come:

$$k_1 = \left|k_1\right| \; e^{j\varphi_1}$$

$$k_2 = \left|k_2\right| \; e^{j\varphi_2}$$

Essendo $k_1$ e $k_2$ due numeri coniugati allora il loro modulo coincide, $\varphi_1 = -\varphi_2 = \varphi$, e quindi possiamo scrivere:

$$k_1 = \left|k\right| \; e^{j\varphi}$$

$$k_2 = \left|k\right| \; e^{-j\varphi}$$

Analogamente, essendo le due soluzioni **α** complesse coniugate, scriveremo:

$$\alpha_1 = \left|\alpha\right| \; e^{j\varphi_\alpha}$$

$$\alpha_2 = |\alpha|\ e^{-j\varphi_\alpha}$$

Ora dimostriamo che anche **A** e **A*** sono coniugati tra loro:

$$A = C\alpha_1 k_1 = C\ |\alpha|\ \ |k|\ e^{j(\varphi+\varphi_\alpha)}$$

$$A^* = C\alpha_2 k_2 = C\ |\alpha|\ \ |k|\ e^{-j(\varphi+\varphi_\alpha)}$$

Che riscritti in forma euleriana:

$$A = |A|\ \ e^{j\varphi_A}$$

$$A^* = |A|\ \ e^{-j\varphi_A}$$

E inserite nella $i(t)$:

$$i(t) = A\ e^{\alpha_1 t} + A^*\ e^{\alpha_2 t} = |A|\left[\ e^{(\alpha_1 t + j\varphi_A)} +\ e^{(\alpha_2 t - j\varphi_A)}\right]$$

Sapendo inoltre che:

$$\alpha_1 = -\sigma + j\omega$$

$$\alpha_2 = -\sigma - j\omega$$

Otteniamo:

$$i(t) = |A|\left[e^{\left[(-\sigma + j\omega)t + j\varphi_A\right]} +\ e^{\left[(-\sigma - j\omega)t - j\varphi_A\right]}\right] =$$

$$= |A|\left[e^{-\sigma t} \bullet\ e^{j(\omega t + \varphi_A)} +\ e^{-\sigma t} \bullet\ e^{j(\omega t + \varphi_A)}\right]$$

Indicando con $\beta = \omega t + \varphi_A$:

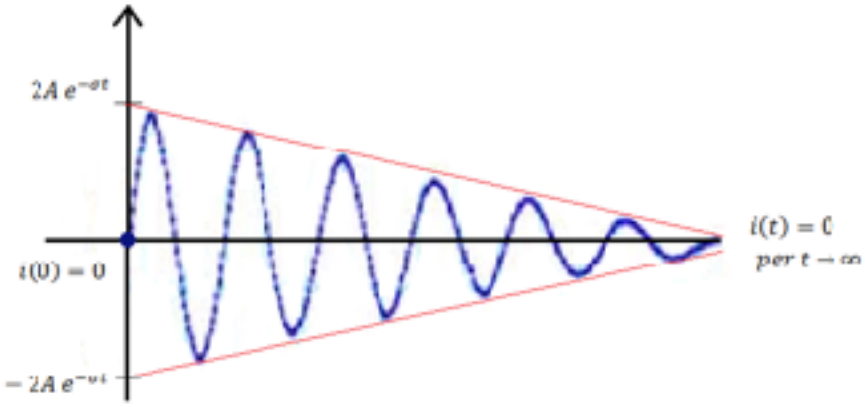
$$i(t) = |A|\ e^{-\sigma t}\left(\ e^{j\beta} +\ e^{-j\beta}\right)$$

Dove in rosso è stata evidenziata la parte reale e in verde quella immaginaria. È possibile, sfruttando la forma euleriana, riportare l'intera espressione a una parte reale:

$$e^{j\beta} +\ e^{-j\beta} = \cos\beta + j\sin\beta + \cos\beta - j\sin\beta = 2\cos\beta$$

$$i(t) = 2|A|\ e^{-\sigma t}\cos(\omega t + \varphi_A)$$

Come possiamo notare quindi, quando il determinante è minore di zero si ha una sinusoide con ampiezza che *cala* col passare del tempo perché compare il termine $e^{-\sigma t}$:




L'ampiezza $2\left|A\right|\, e^{-\sigma t}$ sarebbe la retta rappresentata in rosso sul grafico sopra e ci dice come si smorza la sinusoide. Disegnando anche il suo opposto abbiamo le due rette dove ho max e min della funzione. Quindi per $\Delta < 0$ abbiamo una sinusoide smorzata che corrisponde alla risposta di un oscillatore smorzato.

Un caso molto raro, ma possibile, è quello in cui $R = 0$ o comunque tendente allo zero:

$$R = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \omega_0$$

$\omega_0$ prende il nome di pulsazione naturale (o di risonanza) del circuito. L'andamento della corrente è rappresentato da una sinusoide semplice.

## CASI SOVRASMORZATI E SOTTOSMORZATI

Il confine tra i casi in cui abbiamo $\Delta < 0$ o $\Delta > 0$ è dettato dalla resistenza critica ($\Delta = 0$), definita come:

$$R_{cr} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Se
$R > R_{cr} \quad \Rightarrow \quad \Delta > 0 \quad \Rightarrow \quad Casi\ sovrasmorzati \quad \text{(il segno della corrente non cambia mai)}$

Se
$R < R_{cr} \quad \Rightarrow \quad \Delta < 0 \quad \Rightarrow \quad Casi\ sottosmorzati \quad \text{(frequenti cambi di segno, oscillatore smorzato)}$