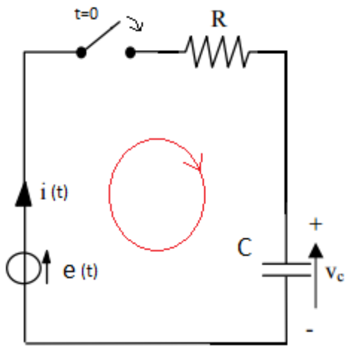
9. Appunti ELETTROTECNICA - CIRCUITI CON MEMORIA

Vengono detti circuiti con memoria quelli in cui è presente almeno un componente la cui legge costitutiva lega la tensione e la corrente attraverso una equazione differenziale (ad esempio il condensatore e l'induttore); in questi casi, infatti, il sistema risolvente del circuito è costituito da un sistema di equazioni *integro-differenziali* ed il valore di tutte le grandezze incognite a ogni generico istante di tempo può essere calcolato solo tramite la conoscenza del valore assunto dalle tensioni sui condensatori e dalle correnti agenti negli induttori nell'istante temporale precedente all'istante considerato (le tensione nei condensatori e le correnti negli induttori sono variabili di stato).

CARICA E SCARICA DI UN CONDENSATORE (CIRCUITO RC)

Prendiamo ad esempio un circuito in cui un condensatore in serie ad un resistore e ad un bipolo, detto interruttore ideale, che è in grado di aprire o chiudere il circuito commutando i sui morsetti dal vuoto al cortocircuito e viceversa:



Per ipotesi, l'interruttore ideale sia a morsetti aperti per il tempo t < 0, commuti in chiuso per t = 0 e così rimanga per t > 0.

Applichiamo il principio alle tensioni di Kirchhoff all'unica maglia presente:

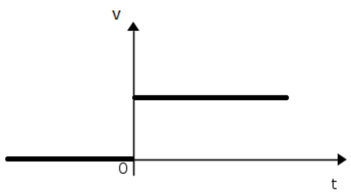
$$e(t) - R\,i - v_c = 0$$

Alla corrente i sostituiamo la legge costitutiva del condensatore, ottenendo:

$$i = C\frac{dv_c}{dt} \quad \Rightarrow \quad e(t) - RC\frac{dv_c}{dt} - v_c = 0$$

Il generatore di tensione e(t) prende il nome di forzante del circuito.

Assumendo costante la tensione erogata dal generatore di tensione (in gergo elettrotecnico si dice che abbiamo un generatore in continua), l'azione dell'interruttore ideale fa sì che il lato R-C veda una forzante impressa "a gradino", cioè al tempo $t = 0^-$ la tensione è nulla, mentre al tempo $t = 0^+$ la tensione erogata assume un valore E diverso da zero:



Avremo dunque per t > 0:

$$e(t) = cost = E \qquad \Rightarrow \qquad E = RC\frac{dv_c}{dt} + v_c$$

Il circuito che stiamo analizzando è un esempio di circuito del primo ordine proprio perché descrivibile attraverso un'equazione differenziale del primo ordine la cui soluzione avrà la seguente forma:

$$v_c(t) = v_{cl}(t) + v_{cf}(t)$$

Dove: $v_{cl}(t)$= risposta libera (si ottiene risolvendo l'*equazione omogenea associata*)

$v_{cf}(t)$= risposta forzata (si ottiene risolvendo *l'integrale particolare*)

Partiamo dal calcolo dell'omogenea associata:

$$v_{cl}(t) = k_1 e^{\alpha t}$$

Per trovare l'incognita **α** trasformiamo l'equazione differenziale del primo ordine in un equazione algebrica mettendo al posto delle derivate la variabile algebrica **α** elevata al grado della derivata:

$$RC\alpha^1 + \alpha^0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad RC\alpha + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = -\frac{1}{RC}$$

Essendo **R** e **C** grandezze sempre positive, il termine **α** avrà un valore negativo e quindi l'esponenziale sarà decrescente nel tempo.

Vediamo ora la risposta forzata. Nel caso generale in cui abbiamo funzioni forzanti di tipo limitato (cioè che al tempo infinito non divergono) si può applicare la proprietà della similarità che afferma che la funzione nel tempo dell'integrale particolare è simile a quella della forzante, cioè nel caso in esame:

$$v_{cf}(t) = k_2 = cost$$

Riunendo i due integrali troviamo la soluzione finale in cui i termini k_1 e k_2 sono ora le uniche incognite:

$$v_c(t) = k_1 e^{-\frac{1}{RC}t} + k_2$$

Conseguentemente possiamo ricavare anche l'espressione della corrente attraverso la legge costitutiva del condensatore ideale:

$$i(t) = C\frac{dv_c}{dt} = C\left(-\frac{1}{RC}k_1 e^{-\frac{1}{RC}t}\right) = -\frac{1}{R}k_1 e^{-\frac{1}{RC}t}$$

Nota: La funzione esponenziale ha argomento *adimensionale* per cui il prodotto RC dovrà avere le dimensioni di un tempo, infatti:

$$[R] = \frac{V}{A} \quad ; \quad [C] = \frac{coulomb}{V} = \frac{A\ s}{V} \qquad \Rightarrow \qquad [RC] = \frac{V}{A}\frac{A\ s}{V} = s$$

Il termine RC prende il nome di costante di tempo τ del circuito perché è una caratteristica del circuito (e non della forzante!).

PROBLEMA DI CAUCHY

Ora per trovare k_1 e k_2 applichiamo il problema di Cauchy: osserviamo che all'istante della *commutazione* (per $t = 0^-$, cioè immediatamente prima di chiudere il circuito) sul condensatore è possibile misurare una tensione $v_c(0)$ qualora il condensatore fosse carico:

$$v_c(0) = k_1 + k_2$$

$$i(0) = -\frac{1}{R}k_1$$

Possiamo notare che la corrente, che a circuito aperto è nulla, risulta, a t = 0 , pari a un valore diverso da zero a causa della discontinuità che si ha nell'istante zero introdotta dall'interruttore ideale.

Vediamo ora cosa accade per $t \to \infty$. Dovrà essere, per l'annullarsi degli esponenziali negativi:

$$v_c(\infty) = k_2$$

$$i(\infty) = 0$$

Le due espressioni qui sopra diventano:

$$e(t) - Ri - v_c = 0 \qquad \Rightarrow \qquad v_c(\infty) = e(t) = E$$

Da cui:

$$k_2 = E$$

Quindi la tensione sul condensatore mantiene il proprio stato, mentre la corrente no.

Di conseguenza abbiamo trovato i valori delle incognite:

$$k_1 = v_c(0) - E$$

$$k_2 = E$$

Da cui:

$$v_c(t) = \left(v_c(0) - E\right)e^{-\frac{1}{RC}t} + E = E\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right) + v_c(0)e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$i(t) = -\frac{1}{R}\left(v_c(0) - E\right)e^{-\frac{1}{RC}t}$$

Si ha lo stato di carica in tutti quei casi in cui risulta $\left|v_c(0)\right| < E$; in particolare è usanza studiare il caso di condensatore inizialmente scarico $v_c(0) = 0$.

Parimenti avremo la scarica del condensatore quando $\left| v_c(0) \right| > E$: il condensatore che parte da carico comincia a scaricarsi nel tempo; in particolare è usanza studiare il caso in cui la forzante è nulla $e(t) = 0$.

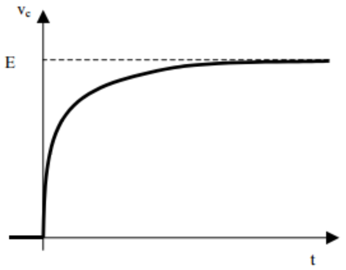
CARICA

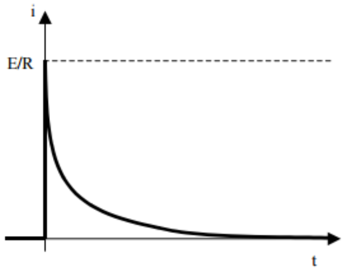
$$v_c(0) = 0$$

$$v_c(t) = E\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$$

$$i(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}$$

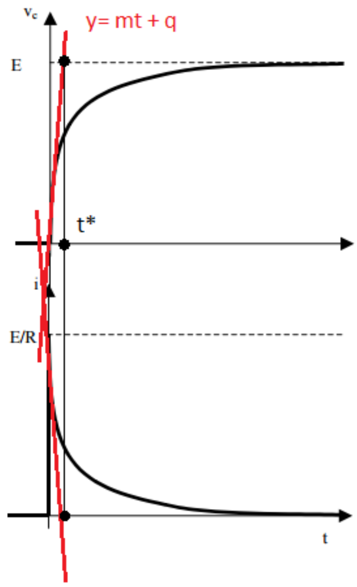
Rappresentiamo graficamente l'andamento della tensione ai capi del condensatore e della corrente:





Dal grafico notiamo che non c'è continuità per quanto riguarda la corrente. Si noti che la presenza di un "salto" iniziale della corrente, sebbene corretto matematicamente, rende "improprio" il modello usato se volessimo usarlo per descrivere l'andamento dell corrente negli istanti di tempo prossimi allo zero. In prossimità della commutazione, le equazioni differenziali del primo ordine non sono più idonee alla descrizione del fenomeno per via del paradosso per cui allo stesso istante di tempo misureremmo due correnti di valore diverso. Vedremo più avanti che il problema sarà risolto adoperando modelli matematici di ordine superiore, ad esempio del secondo ordine.

La costante di tempo **τ** può essere ricavata graficamente una volta noto l'andamento di tensione o corrente. Tale operazione è utile, per esempio, nei casi in cui non abbiamo informazioni sulla resistenza e sulla capacità e vogliamo ricavarle a partire dai grafici ottenuti sperimentalmente. Come primo passo tracciamo le tangenti alle curve passanti per l'origine (grafico tensione) e per E/R (grafico corrente):



La retta tangente alla curva della tensione assume l'espressione:

$$y = mt + q$$

Il coefficiente angolare m rappresenta la derivata della funzione tensione all'istante t=0 e può essere così determinato:

$$i = C\frac{dv}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dv}{dt} = m = \frac{i}{C} = \frac{E}{RC}$$

Il termine noto q è invece nullo poiché la retta parte dall'origine. In conclusione avremo che:

$$y = \frac{E}{RC}t$$

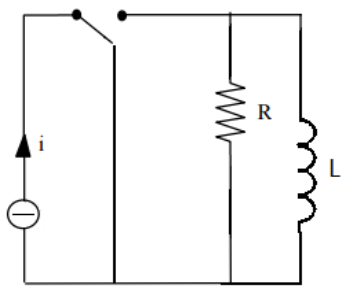
Al tempo t^* la y vale E, quindi otteniamo:

$$E = \frac{E}{RC}t^* \qquad \Rightarrow \qquad t^* = RC = \tau$$

Dal punto di vista matematico abbiamo visto che un condensatore finisce di caricarsi quando $t = \infty$. Naturalmente l'esperienza ci suggerisce che un condensatore può già essere considerato carico dopo 4-5 τ di tempo. Ciò vuol dire che conoscere τ, significa conoscere con quanta velocità si ricarica un condensatore: più τ è piccolo, meno tempo ci impiega il condensatore a caricarsi completamente.

CARICA E SCARICA DI UN INDUTTORE (CIRCUITO RL)

Prendiamo un circuito in cui è presente un induttore in parallelo a un resistore e a un interruttore ideale, in grado di aprire o chiudere il circuito commutando:



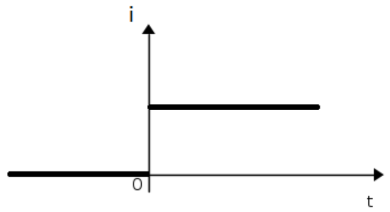
Applichiamo il principio alle correnti di Kirchhoff all'unico nodo presente:

$$i(t) - Gv - i_L = 0$$

Alla tensione v sostituiamo la legge costitutiva dell'induttore, ottenendo:

$$v = L\frac{di_L}{dt} \quad \Rightarrow \quad i(t) - GL\frac{di_L}{dt} - i_L = 0$$

Il generatore di corrente è la forzante del circuito che anche qui assumiamo sia impressa "a gradino", cioè al tempo $t = 0^-$ avremo corrente nulla, mentre al tempo $t = 0^+$ avremo un valore di corrente diverso da zero:



avendo assunto costante la corrente generata dal generatore di corrente:

$$i(t) = cost = I \quad \Rightarrow \quad I = GL\frac{di_L}{dt} + i_L$$

Abbiamo ottenuto un'equazione differenziale del primo ordine la cui soluzione avrà la seguente forma:

$$i_L(t) = i_{Ll}(t) + i_{Lf}(t)$$

Partiamo dal calcolo dell'omogenea associata:

$$i_{Ll}(t) = k_1 e^{\alpha t}$$

Per trovare l'incognita **α** trasformiamo l'equazione differenziale del primo ordine in un equazione algebrica:

$$GL\alpha^1 + \alpha^0 = 0 \quad \Rightarrow \quad GL\alpha + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{1}{GL}$$

Essendo **L** e **G** grandezze sempre positive, il termine **α** sarà sempre un valore negativo e quindi l'esponenziale decresce nel tempo.

Vediamo ora la risposta forzata:

$$i_{Lf}(t) = k_2 = cost$$

Riunendo le due soluzioni troviamo la soluzione finale in cui i termini k_1 e k_2 sono le uniche incognite:

$$i_L(t) = k_1 e^{-\frac{1}{GL}t} + k_2$$

Dalla quale possiamo ricavare l'espressione della corrente:

$$v(t) = L\frac{di_L}{dt} = L\left(-\frac{1}{GL}k_1 e^{-\frac{1}{GL}t}\right) = -\frac{1}{G}k_1 e^{-\frac{1}{GL}t}$$

La funzione esponenziale necessita di un argomento adimensionale per cui il prodotto GL dovrà avere le dimensioni di un tempo affinché tutto quadri:

$$[G] = \frac{A}{V} \quad ; \quad [L] = \frac{weber}{A} = \frac{V\,s}{A} \qquad \Rightarrow \qquad [RC] = \frac{A}{V}\frac{V\,s}{A} = s$$

Il termine GL prende anche il nome di costante di tempo del circuito **τ**.

PROBLEMA DI CAUCHY

Ora per trovare k_1 e k_2 utilizziamo il problema di Cauchy e prima di tutto osserviamo che all'istante prima della commutazione (cioè prima di chiudere il circuito) possiamo rilevare un valore noto di corrente $i_L(0)$ qualora l'induttore fosse carico pari a:

$$i_L(0) = k_1 + k_2$$

per $t \to \infty$:

$$i_L(\infty) = k_2$$

$$v(\infty) = 0$$

Se riprendo l'equazione del nodo:

$$i(t) - Gv - i_L = 0 \quad \Rightarrow \quad i_L(\infty) = i(t) = I$$

Da cui:

$$k_2 = I$$

Che ci permette di affermare che mentre la corrente mantiene il proprio stato, la tensione no. E quindi se proseguiamo l'osservazione per tempi molto lunghi ritroveremo l'induttore carico con la stessa corrente del generatore (il generatore di corrente carica integralmente l'induttore) e la tensione sarà assente.

A questo punto abbiamo trovato i valori delle incognite k:

$$k_1 = i_L(0) - I$$

$$k_2 = I$$

Da cui:

$$i_L(t) = \left(i_L(0) - I\right)e^{-\frac{1}{GL}t} + I = I\left(1 - e^{-\frac{1}{GL}t}\right) + i_L(0)e^{-\frac{1}{GL}t}$$

$$v(t) = -\frac{1}{G}\left(i_L(0) - I\right)e^{-\frac{1}{GL}t}$$

Si ha lo stato di carica in tutti quei casi in cui risulta $\left|i_L(0)\right| < I$; in particolare è usanza studiare il caso in cui $i_L(0) = 0$. Parimenti avremo scarica dell'induttore quando $\left|i_L(0)\right| > I$ con l'induttore che parte da carico e comincia a scaricarsi nel tempo; in particolare è usanza studiare il caso in cui la forzante è nulla: $i(t) = 0$.

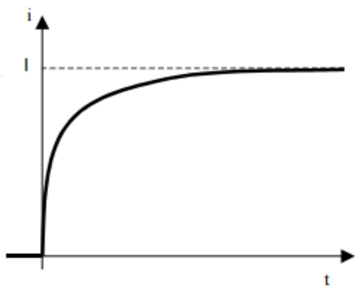
STATO DI CARICA

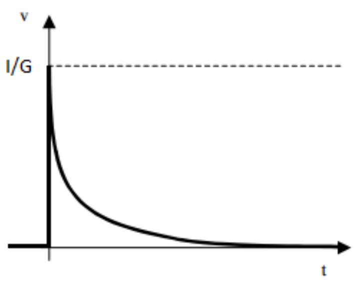
$$i_L(0) = 0$$

$$i_L(t) = I\left(1 - e^{-\frac{1}{GL}t}\right)$$

$$v(t) = \frac{I}{G}e^{-\frac{1}{GL}t}$$

Rappresentiamo graficamente l'andamento della corrente e della tensione:





CIRCUITI RLC

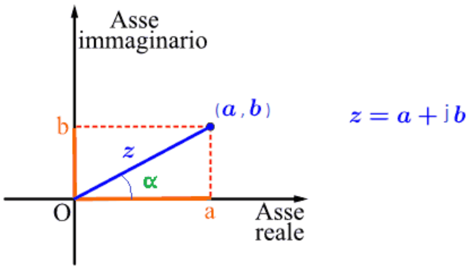
I circuiti che coinvolgono sia condensatori che induttori sono detti di secondo ordine. Prima di affrontare l'argomento, però, è utile richiamare alla mente qualche nozione sui *numeri immaginari*.

RICHIAMI SUI NUMERI IMMAGINARI

Nel mondo dei numeri complessi, o immaginari, sussiste la seguente relazione:

$$j^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad j = \sqrt{-1}$$

Ogni numero z , reale o immaginario che sia, può essere rappresentato su un particolare piano, detto piano di Gauss, che ha sull'ascisse la parte reale del numero e sulle ordinate quella immaginaria:



Ogni numero individua un vettore sul piano di Gauss avente un modulo e un angolo che ne dà l'inclinazione rispetto all'asse reale:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{b}{a} + 0 \qquad se\ b > 0$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{b}{a} \pm \pi \qquad se\ b < 0$$

Scriviamo **a** e **b** in coordinate angolari:

$$a = |z|\cos\alpha$$

$$b = |z|\sin\alpha$$

Sostituendo in z abbiamo:

$$z = a + jb = |z|\cos\alpha + j|z|\sin\alpha = |z|\left(\cos\alpha + j\sin\alpha\right)$$

Per vedere come varia z in funzione di α effettuiamo la derivata:

$$\frac{dz}{d\alpha} = |z|\left(-\sin\alpha + j\cos\alpha\right)$$

Moltiplichiamo ora z per il versore dei numeri immaginari j:

$$j\,z = |z|\,\mathrm{j}\cos\alpha + j^2|z|\sin\alpha = |z|\left(\mathrm{j}\cos\alpha - \sin\alpha\right)$$

E quindi abbiamo che:

$$\frac{dz}{d\alpha} = j\,z$$

Integrando per separazione di variabili avremo:

$$\frac{1}{z}dz = j\,d\alpha \quad \Rightarrow \quad \int_{z(0)=|z|}^{z(\alpha)=z} \frac{1}{z}dz = j\int_0^{\alpha} d\alpha \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{z}{|z|} = j\alpha \quad \Rightarrow \quad z = |z|\, e^{j\alpha}$$

Se a z sostituiamo **1** otteniamo la formula di Eulero:

$$1 = |1|\, e^{j\pi} \quad \Rightarrow \quad e^{j\pi} = -1$$

La formula di Eulero permette anche di interpretare le funzioni seno e coseno come semplici varianti della funzione esponenziale:

$$\cos\alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}$$

$$\sin\alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2}$$

Confrontando le seguenti equazioni:

$$z = |z|\left(\cos\alpha + j\sin\alpha\right) \quad \Leftrightarrow \quad z = |z|\, e^{j\alpha}$$

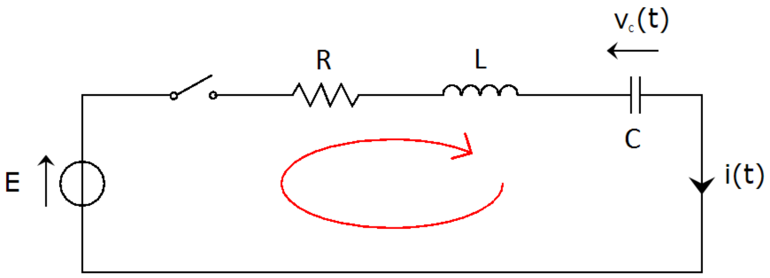
Possiamo scrivere:

$$\left(\cos\alpha + j\sin\alpha\right) = e^{j\alpha}$$

Che dimostra che è possibile passare da funzioni trigonometriche a funzioni esponenziali con numeri complessi. Questa proprietà è molto importante perché le equazioni omogenee associate coinvolgono sempre esponenziali: mentre, però, nelle equazioni differenziali di primo ordine gli esponenziali sono sempre numeri reali di secondo ordine, in quelle di secondo ordine ci saranno casi in cui a seconda dei valori di **R**, **L** o **C** del circuito potremmo avere soluzioni in cui il determinante è minore di zero e quindi dovremo far uso dei numeri complessi.

RISPOSTA DI UN CIRCUITO RLC SU FORZANTE CONTINUA IMPRESSA A GRADINO

È dato il seguente circuito RLC:



Applichiamo il principio alle tensioni di Kirchhoff all'unica maglia:

$$E - v_R(t) - v_L(t) - v_C(t) = 0$$

Sapendo che:

$$v_L(t) = L\frac{di}{dt} \qquad e \qquad i(t) = C\frac{dv_C}{dt}$$

Otteniamo:

$$E = R\,i(t) + L\frac{di}{dt} + v_C \quad \Rightarrow \quad E = RC\frac{dv_C}{dt} + LC\frac{d^2v_C}{dt} + v_C$$

La tensione v_C si otterrà risolvendo l'equazione differenziale del secondo ordine scritta sopra e la soluzione avrà la seguente forma composta da una risposta libera e da una forzata:

$$v_c(t) = v_{cl}(t) + v_{cf}(t)$$

Scriviamo l'omogenea associata:

$$RC\alpha + LC\alpha^2 + 1 = 0$$

$$\alpha_{1,2} = -\frac{RC \pm \sqrt{(RC)^2 - 4LC}}{2LC} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\Delta}$$

Quindi l'espressione della risposta libera sarà:

$$v_{cl}(t) = k_1e^{\alpha_1 t} + k_2e^{\alpha_2 t}$$

La risposta forzata invece corrisponderà a una costante in accordo con il principio matematico della similarità visto in precedenza:

$$v_{cf}(t) = k_3$$

In conclusione avremo quindi che l'espressione formale della tensione sarà:

$$v_c(t) = k_1e^{\alpha_1 t} + k_2e^{\alpha_2 t} + k_3$$

Avendo tre incognite (k_1, k_2, k_3) necessitiamo di altrettante equazioni per giungere alla soluzione. Per ottenere tali equazioni imponiamo delle condizioni dettate dagli estremi temporali t=0 e t=∞.

Per $t = 0$:

$$v_c(0) = k_1 + k_2 + k_3$$

$$i(t) = C\frac{dv_C}{dt} = C\left(k_1\alpha_1 e^{\alpha_1 t} + k_2\alpha_2 e^{\alpha_2 t}\right) \qquad \Rightarrow \qquad i(0) = C(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2)$$

Per $t \to \infty$:

$$v_c(\infty) = k_3$$

$$i(\infty) = 0$$

Se riprendiamo l'equazione della maglia:

$$E = R\,i(\infty) + L\frac{di(\infty)}{dt} + v_C \qquad \Rightarrow \qquad v_C(\infty) = E$$

Da cui:

$$k_3 = E$$

Riprendiamo infine le soluzioni $\alpha_{1,2}$ dell'equazione omogenea associata; a seconda del valore del determinante avremo 3 casi:

1) $\Delta > 0$

   Se il determinante è positivo avremo due soluzioni reali *negative*; (Nota: qualora non fossero negative, infatti, la condizione $v_C(\infty) = k_3 = E$ non sarebbe più valida perché gli esponenziali non tenderebbero a zero per $t \to \infty$).

   Osserviamo l'espressione:

$$-\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

   Il termine $-\frac{R}{2L}$ sarà sicuramente negativo, mentre la radice è positiva per ipotesi. Il caso in cui sottraiamo la radice non crea ovviamente problemi perché sicuramente otterremo una soluzione negativa. Nel caso in cui aggiungiamo il valore positivo della radice occorre osservare che la soluzione finale sarà sicuramente negativa in quanto

$$\left|-\frac{R}{2L}\right| > \left|\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}\right|$$

   Appurato che $\alpha_{1,2}$ sono negative proseguiamo con la soluzione attraverso la formalizzazione del problema di Cauchy e risolvendo il sistema:

$$v_c(0) = k_1 + k_2 + k_3$$

$$i(0) = C(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2)$$
$$k_3 = E$$

2) $\Delta \ < 0$

Se il determinante è minore di zero avremo due soluzioni complesse e coniugate.

$$\alpha_1 = \ -\sigma + j\omega$$
$$\alpha_2 = \ -\sigma - j\omega$$

Con:

$$\sigma = \frac{R}{2L} = parte\ reale$$
$$\omega = \sqrt{|\ \Delta\ |} = parte\ immaginaria$$
$$j = \sqrt{-1} = parte\ immaginaria$$

In accordo con i richiami di numeri complessi fatti in precedenza possiamo scrivere le soluzioni in forma esponenziale:

$$e^{(\sigma \pm j\omega)t}$$

Dove e^{σ} è un esponenziale negativo, mentre $e^{j\omega t}$, insieme con il suo coniugato, darnno conto di funzione sinusoidale. Ciò vuol dire che la risposta libera tenderà a zero in modo oscillatorio (oscillatorio smorzato).

3) $\Delta \ = 0$

Se il determinante fosse nullo ci troveremmo di fronte a un caso “praticamente” impossibile perché avremmo la necessità di un resistore dotato di una resistenza **R**, un condensatore con capacità **C** e un induttore con induttanza **L** tali che combinati insieme annullino il termine sotto radice $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}$. Non è possibile ottenere una tale precisione per i vari componenti nelle applicazioni reali. Quindi questo caso ha interesse meramente matematico, ma nelle applicazioni può essere studiato come limite dei due casi precedenti.