Circuiti*
Materiale didattico: teoremi delle reti elettriche

A. Laudani

October 22, 2016

In questa dispensa vengono presentati alcuni dei principali teoremi delle reti elettriche, ossia

- il teorema di sostituzione
- il teorema di sovrapposizione
- il teorema della rete equivalente di Thevenin-Norton
- il teorema di reciprocità

L'ipotesi che sta alla base di tutti questi teoremi è l'unicità della soluzione per la rete elettrica considerata[1]. Come si avrà modo di osservare il teorema dalle ipotesi meno restrittive è quello di sostituzione, che si può applicare a tutte le reti con soluzione unica (prima e dopo la sostituzione), indipendentemente dal fatto che la rete sia costituita da elementi lineari, non lineari, tempo varianti o tempo invarianti. Gli altri teoremi si applicano invece solo a reti lineari, ed in particolare il teorema di sovrapposizione e il teorema delle reti equivalenti alla Thevenin o Norton si applicano a tutte le reti lineari. Il teorema di reciprocità si applica ad una classe più ristretta di reti lineari, infatti devono essere presenti solo elementi lineari tempo invarianti (LTI) e questi stessi devono soddisfare altre opportune ipotesi. Altri importanti teoremi dell'elettrotecnica, quali il teorema fondamentale del regime sinusoidale,

---

*A.A. 2016/2017, C.d.L. in Ingegneria Elettronica, 9 crediti, 72 ore, docente del corso Prof. A. Laudani, e-mail: alaudani@uniroma3.it

[1] Il problema dell'unicità della soluzione di una rete elettrica non può essere trattato purtroppo in maniera generale, prescindendo dalla natura dei componenti e dalla loro connessione, in quanto solo dopo aver considerato questi aspetti è possibile trarre delle conclusioni a tal riguardo

il teorema di Tellegen, il teorema del massimo trasferimento della potenza attiva ed altri ancora, non vengono discussi in questa dispensa, in quanto non sono utilizzati in fase di analisi, ma stabiliscono particolari condizioni di funzionamento.

1 Teorema di sostituzione

Il teorema di sostituzione permette di sostituire qualsiasi lato della rete con un generatore indipendente convenientemente scelto senza che cambino, qualora dopo la sostituzione esista un'unica soluzione, le forme d'onda delle correnti e delle tensioni di lato. Chiaramente l'obiettivo di un tale teorema è quello di rendere la rete modificata più semplice da analizzare rispetto alla rete originale. Questo teorema può essere formulato come segue:

Si consideri una rete arbitraria che contenga un certo numero di generatori indipendenti. Si supponga che, per questi generatori e per le condizioni iniziali date, la rete abbia un'unica soluzione per tutte le tensioni e tutte le correnti di lato. Si consideri un lato k della rete non accoppiato con gli altri lati della rete, ovvero tale che l'unica interazione con il resto della rete avvenga esclusivamente tramite la sua corrente e la sua tensione di lato. Siano $i_k(t)$ e $v_k(t)$ le forme d'onda della corrente e della tensione del lato k. Si supponga di sostituire il lato k con un generatore indipendente di corrente $i_s(t)$ (o con un generatore indipendente di tensione $v_s(t)$), avente forma d'onda $i_k(t)$ (o $v_k(t)$), cioè $i_s(t) = i_k(t)$ (o $v_s(t) = v_k(t)$). Se la rete modificata ha soluzione unica per ogni sua variabile di rete allora questa soluzione coincide con quella della rete originaria.

Dim. Siano $v_1(t)$, $v_2(t)$,..., $v_n(t)$ e $i_1(t)$, $i_2(t)$,..., $i_n(t)$ le forme d'onda delle tensioni e delle correnti di lato della rete. Chiaramente queste forme d'onda, essendo soluzioni della rete originaria, soddisfano le LKT e le LKC, le condizioni iniziali e le leggi di lato della rete data. Si consideri il caso in cui la rete modificata è ottenuta sostituendo il lato k-esimo con un generatore di tensione $v_s(t)$ avente forma d'onda pari a $v_k(t)$. Siano $v_1^*(t)$, $v_2^*(t)$,..., $v_n^*(t)$ e $i_1^*(t)$, $i_2^*(t)$,..., $i_n^*(t)$ le forme d'onda delle tensioni e delle correnti di lato della soluzione (unica per ipotesi) della rete modificata. Poiché la topologia della rete originaria e della rete modificata è la stessa, identiche saranno le equazioni di Kirchhoff. Del resto anche le equazioni di lato sono le stesse eccetto quella relativa al lato k-esimo. Di conseguenza l'insieme delle tensioni di lato e delle correnti di lato della rete originaria soddisfa le equazioni LKC e LKT e tutte le leggi di lato della rete modificata eccetto che per il lato k.

Del resto nella rete modificata il lato k è un generatore di tensione, perciò la sola condizione imposta dalla legge di lato è che la tensione del lato sia uguale alla forma d'onda del generatore. Ma allora la soluzione della rete originaria soddisfa anche questa relazione in virtù della scelta della forma d'onda del generatore. Si può concludere quindi che la soluzione della rete originaria è anche soluzione della rete modificata, ed essendo la soluzione di quest'ultima unica per ipotesi la tesi del teorema risulta dimostrata. La dimostrazione nel caso in cui il k-esimo lato venga sostituito con un generatore di corrente che abbia la forma d'onda $i_k(t)$ è del tutto simile.

Osservazioni:

- Si noti che può accadere che la rete modificata abbia soluzione unica solo per una delle due possibili sostituzioni ammissibili, e questo può accedere anche per reti lineari. Del resto l'ipotesi dell'unicità della soluzione comporta che sicuramente è possibile applicare (a parte qualche caso degenere) il teorema di sostituzione alle reti lineari.

- Il teorema è particolarmente utile nell'analisi di reti che contengono un solo elemento non lineare, in quanto permette la sostituzione dell'elemento con un generatore indipendente.

2 Teorema di sovrapposizione

Il teorema di sovrapposizione è anch'esso molto generale e si applica a tutte le reti lineari (tempo varianti e invarianti). Lo si può enunciare come segue:

Sia $\boldsymbol{N}$ una rete costituita esclusivamente o da elementi lineari ed omogenei o da generatori indipendenti (indicati con $s_k(t)$ indipendentemente dalla loro natura di generatori di tensione o di corrente e di seguito chiamate eccitazioni o forzanti). Si dirà risposta di $\boldsymbol{N}$ una qualsiasi variabile di rete di $\boldsymbol{N}$ o combinazione lineare di variabili di rete (ad esempio la corrente in un lato specifico e la tensione ai capi di una qualsiasi coppia di morsetti o più in generale tra due nodi qualsiasi). Si supponga che $\boldsymbol{N}$ abbia una sola risposta con stato zero quando agisce una sola eccitazione alla volta qualunque sia la sua forma d'onda. In tali condizioni la risposta di $\boldsymbol{N}$ con stato zero, dovuta a tutti le forzanti quando agiscono contemporaneamente, è uguale alla somma delle risposte con stato zero dovuta alle forzanti quando agiscono una alla volta.

Dim. Si osservi innanzitutto che il legame tra la risposta $y(t)$ di una rete lineare $\boldsymbol{N}$ a stato zero a tutti i generatori indipendenti della rete soddisfa una relazione integro-differenziale lineare eventualmente tempo variante γ in $y(t)$ del tipo

$$\gamma(y(t), t) = f([s_k(t)], [\dot{s_k}(t)], \cdots, t)$$

in cui il termine noto sta ad indicare una combinazione lineare delle forzanti e delle loro derivate. Questo è vero dato che questa relazione si ottiene a partire dalla leggi di Kirchhoff delle correnti e delle tensioni, che sono relazioni algebriche, lineari e omogenee e dalle leggi di lato che sono anch'esse lineari ed omogenee, seppur possano essere integro-differenziali e nel caso generale tempo varianti. Poiché per ipotesi questa equazione differenziale lineare ammette soluzione unica a stato zero, segue dalla linearità dell'equazione che la soluzione sarà pari alla combinazione lineare delle risposte a stato zero dovute all'azione del singolo generatore indipendente.

Osservazioni:

- è chiaramente una condizione sufficiente, per cui può anche accadere che una rete non lineare è possibile che la sovrapposizione sia valida con scelta opportuna dei valori degli elementi, della posizione del generatore e della risposta.
- Se si considera che il regime sinusoidale è la condizione limite per t che tende a infinito della risposta con stato zero ad un ingresso sinusoidale, si può applicare il teorema di sovrapposizione ricavando che la risposta a regime di una rete lineare tempo invariante a stato zero e le cui eccitazioni siano tutte di tipo sinusoidale (non necessariamente alla stessa frequenza) e che ammette regime sinusoidale (cioè ha soluzione unica ed è esponenzialmente stabile), è uguale alla somma delle risposte in regime sinusoidale dovute ai generatori indipendenti agenti separatamente.
- Se la rete non è a stato zero il teorema perde la sua validità. Sebbene lo si possa estendere facilmente anche in questo caso utilizzando per gli elementi a memoria la rappresentazione equivalente costituita dall'elemento a stato zero con in serie o in parallelo un generatore indipendente contenente la condizione iniziale.

3 Teorema di Thevenin-Norton

Il teorema delle reti equivalenti di Thevenin e Norton è uno strumento molto potente per la determinazione della risposta di reti complesse. È un teorema che si applica ad un'ampia classe di reti. Esso prende in esame la seguente situazione:

*Si consideri una rete lineare **N**, collegata ad un carico arbitrario tramite due morsetti **A** e **B** come indicato in figura fig. 1*

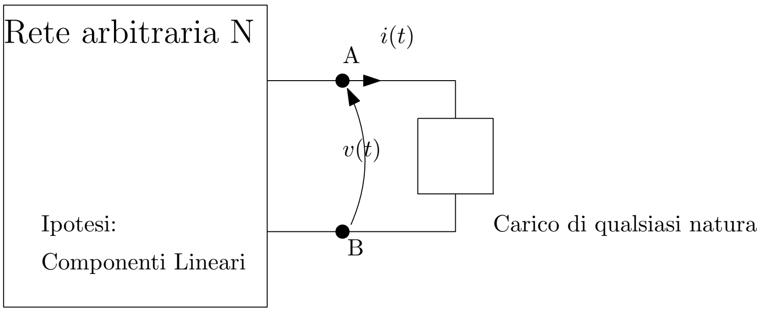

Figure 1: Rete generica

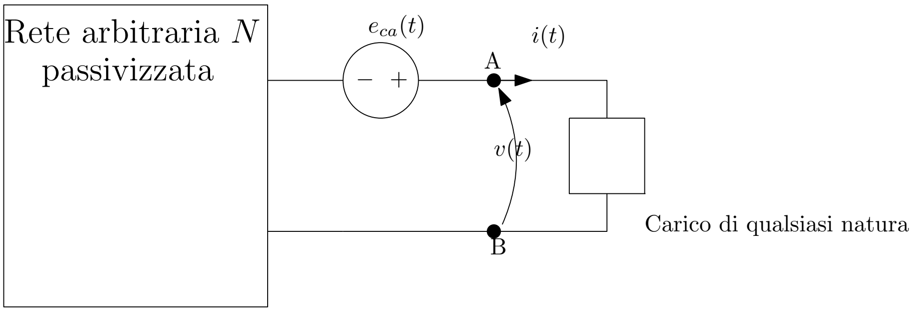

Figure 2: rete generica thevenin

*Si supponga che la sola interazione tra **N** e il carico*[2] *derivi dalla corrente che passa attraverso i terminali **A** e **B**. In particolare non vi sia nessun tipo di accoppiamento, nè di tipo elettrico, nè meccanico, nè termico, ecc. In termini generali il teorema di Thevenin-Norton stabilisce che se **N** ha una sola soluzione quando è collegata al carico e quando il carico è sostituito con un generatore indipendente che ha la stessa forma d'onda della corrente o della tensione sul carico, allora la forma d'onda della corrente $i(\cdot)$ e la forma d'onda della tensione $v(\cdot)$ ai morsetti **A** e **B** non cambiano se **N** è sostituito da una rete equivalente di Thevenin o da una rete equivalente alla Norton:*

- *La rete equivalente di Thevenin, rappresentata in fig. 2, consta di una rete N_0 a due morsetti in serie con un generatore di tensione e_{ca}. La*

[2] È importante il fatto che non fanno ipotesi riguardo al carico, questo può essere lineare, non lineare e/o tempo variante.

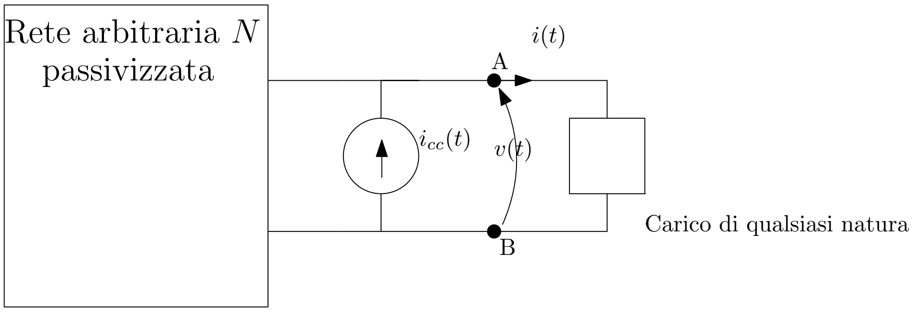

Figure 3: rete generica Norton

tensione del generatore $e_{ca}(\cdot)$ *è uguale alla tensione di circuito aperto di* $\boldsymbol{N}$*, cioè la tensione tra i morsetti* $\boldsymbol{A}$ *e* $\boldsymbol{B}$ *quando il carico non è collegato. Questa tensione è dovuta a tutti i generatori indipendenti di* $\boldsymbol{N}$ *e allo stato iniziale. La rete* N_0 *è ottenuta dalla rete* $\boldsymbol{N}$ *azzerando tutti i generatori indipendenti e ponendo a zero tutte le condizioni iniziali.*

- *La rete equivalente di Norton, rappresentata in fig. 3, consta della stessa rete* N_0 *a due morsetti posta in parallelo con il generatore di corrente indipendente* i_{cc}*. La forma d'onda* $i_{cc}(\cdot)$ *del generatore di corrente è uguale alla corrente di cortocircuito di* $\boldsymbol{N}$*, cioè la corrente passante nel cortocircuito che collega i morsetti* $\boldsymbol{A}$ *e* $\boldsymbol{B}$*. Questa corrente è dovuta a tutti i generatori indipendenti di* $\boldsymbol{N}$ *e allo stato iniziale.*

Per verificare l'equivalenza delle reti di Thevenin e Norton e la rete originaria per prima cosa si considerino gli equivalenti degli elementi a stato diverso da zero, cioè si consideri in serie ad ogni condensatore un generatore indipendente di tensione costante di valore pari alla tensione del condensatore all'istante t_0 e in parallelo ad ogni induttore un generatore indipendente di corrente costante di valore pari alla corrente dell'induttore all'istante t_0. A questo punto si sostituisca il carico con un generatore indipendente di corrente $i(\cdot)$. La rete risultante è lineare e per ipotesi ha soluzione unica. Per il teorema di sostituzione il valore di tutte le tensioni e di tutte le correnti della rete è lo stesso di quello della rete originaria. In particolare anche la tensione $v(\cdot)$ tra i morsetti **A** e **B** è la stessa di quella della rete originaria. Si applichi adesso il teorema di sovrapposizione: la rete **N** è pilotata dal generatore indipendente esterno $i(\cdot)$ e da tutti i generatori interni alla rete (che includono anche lo stato). La tensione $v(\cdot)$ pertanto si può scrivere come somma di due termini: $v_1(t)$ è la risposta con stato zero dovuta al generatore indipendente $i(\cdot)$ quando agisce da solo; $e_{ca}(t)$ è la risposta con stato zero quando agiscono solo i generatori interni alla rete **N** (in cui è stato incluso lo stato). L'espressione di $v_1(t)$ si ottiene azzerando tutti i generatori indipendenti interni e considerando solo il generatore $i(\cdot)$. Di conseguenza

$$v(t) = e_{ca}(t) + \int_0^t h(t,t') \cdot i(t')dt'$$

dove $h(t,t')$ è la risposta all'impulso della rete a riposo N_0 all'istante t dovuta ad un impulso unitario applicato all'istante t'. Per calcolare $e_{ca}(t)$ basta spegnere il generatore $i(\cdot)$, e osservare che in questo caso **N** resta caricata da un circuito aperto, per cui $e_{ca}(t)$, cioè la tensione tra i morsetti **A** e **B** dovuta ai generatori indipendenti di **N**, è proprio la tensione di circuito aperto. L'espressione completa di $v(\cdot)$ è quindi del tutto analoga a quella che si ottiene per la rete equivalente di Thevenin.

Si noti che la rete equivalente di Thevenin ha la stessa tensione hai morsetti e la stessa corrente ai morsetti della rete assegnata **N** e poiché non si è fatta alcuna ipotesi sul carico, ciò accade per tutti i carichi ammissibili (purchè la rete ammetta soluzione unica). Il teorema della rete equivalente di Norton può essere dimostrato usando il procedimento duale (scegliendo al posto di un generatore indipendente di corrente uno di tensione).

Osservazioni:

- Si noti che nel caso di reti lineari tempo invarianti la risposta all'impulso usata nell'integrale di convoluzione non dipende da t e t' ma da $t - t'$. Inoltre se in questo caso si conduce un'analisi in un dominio trasformato (es. di Laplace) si trova al posto dell'integrale di convoluzione una funzione di rete che nel caso particolare di equivalente alla Thevenin è l'autoimpedenza alla porta A-B, mentre nel caso di equivalente alla Norton è l'autoammettenza alla porta A-B.

- Si noti inoltre che non è sempre possibile trovare per una rete qualsiasi entrambe le rappresentazioni equivalenti.

- Queste equivalenze permettono di dire che una rete accessibile da una porta può essere caratterizzata esternamente mediante due termini, di cui uno si riferisce al caso in cui tutte le eccitazioni interne siano state disattivate e rappresenta quindi come la rete risponde ad una eccitazione (di corrente o di tensione) alla porta, l'altra è una tensione o una corrente (tensione della porta a bipolo aperto, corrente della porta a bipolo corto-circuitato) e quindi può essere rappresentata mediante un generatore indipendente ed è dovuta ai generatori indipendenti e allo stato della rete.

4 Teorema di reciprocità

La reciprocità è una proprietà generale di alcuni sistemi e riguarda l'interazione di due o più eccitazioni nel sistema stesso: in qualche modo è legata al concetto di causa-effetto nel senso che in un sistema reciproco l'effetto non si modifica se si scambiano tra loro la posizione della causa e quella dell'effetto. In particolare nel caso di circuiti con compoenti adinamici questa interazione può essere ottenuta considerando la potenza entrante nel circuito, supposto accessibile da **N** porte, in due diverse situazioni di eccitazione della, qui indicate con (a) e (b), e quando tali eccitazioni agiscono contemporaneamente $(a) + (b)$. In questo caso infatti si ha

$$p(t)_{(a)} = \sum_{l=1}^{N} v_l(t)^{(a)} \cdot i_l(t)^{(a)} \tag{1}$$

$$p(t)_{(b)} = \sum_{l=1}^{N} v_l(t)^{(b)} \cdot i_l(t)^{(b)} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} p(t)_{(a)+(b)} &= \sum_{l=1}^{N}(v_l(t)^{(a)} + v_l(t)^{(b)}) \cdot (i_l(t)^{(a)} + i_l(t)^{(b)}) = \\ &= p(t)_{(a)} + p(t)_{(b)} + \sum_{l=1}^{N} v_l(t)^{(a)} \cdot i_l(t)^{(b)} + \sum_{l=1}^{N} v_l(t)^{(b)} \cdot i_l(t)^{(a)} \end{aligned} \tag{3}$$

Se i termini $\sum_{l=1}^{N} v_l(t)^{(a)} \cdot i_l(t)^{(b)}$, $\sum_{l=1}^{N} v_l(t)^{(b)} \cdot i_l(t)^{(a)}$, che rappresentano l'interazione tra le due eccitazioni, sono uguali, la rete è reciproca. In questo consiste la legge di reciprocità di Lorentz, che si può enunciare:
Considerate due situazioni diverse di eccitazione alle porte, indicate rispettivamente con (a) e (b), un circuito accessibile da N-porte si dirà reciproco se le grandezze elettriche di porta soddisfano la seguente relazione:

$$\sum_{l=1}^{N} v_l(t)^{(a)} \cdot i_l(t)^{(b)} = \sum_{l=1}^{N} v_l(t)^{(b)} \cdot i_l(t)^{(a)} \tag{4}$$

Per generalizzare la problematica della reciprocità alle reti dinamiche sarebbe necessario introdurre il concetto di lavoro virtuale complicando notevolmente le relazioni in gioco. Poichè una trattazione di questo tipo non si ritiene necessaria per un corso di primo livello si preferisce considerare la relazione

$\sum_{l=1}^{N} v_l(p)^{(a)} \cdot i_l(p)^{(b)}$, $\sum_{l=1}^{N} v_l(p)^{(b)} \cdot i_l(p)^{(a)}$ definita nel dominio trasformato [3] p per la definizione di bipolo reciproco.

Osservazioni:

- Si verifica di seguito la reciprocità di alcuni bipoli noti. Risulta immediatamente che un generatore indipendente di tensione o di corrente non è reciproco. Per quanto riguarda invece i bipoli passivi lineari tempo invarianti, considerando elementi a stato zero e supponendo di lavorare nel dominio trasformato, si ha:

$$V_1^{(a)} \cdot I_1^{(b)} = Z(p) I_1^{(a)} \cdot I_1^{(b)} = Z(p) I_1^{(b)} \cdot I_1^{(a)} = V_1^{(b)} \cdot I_1^{(a)}$$

  Per cui un generico bipolo LTI passivo è reciproco.

- In maniera analoga si può ricavare che un trasformatore ideale è reciproco infatti

$$V_1^{(a)} \cdot I_1^{(b)} + V_2^{(a)} \cdot I_2^{(b)} = n \cdot V_2^{(a)} \cdot I_1^{(b)} - V_2^{(a)} \cdot n \cdot I_1^{(b)} = 0$$

$$V_1^{(b)} \cdot I_1^{(a)} + V_2^{(b)} \cdot I_2^{(a)} = n \cdot V_2^{(b)} \cdot I_1^{(a)} - V_2^{(b)} \cdot n \cdot I_1^{(a)} = 0$$

- Analogo discorso può farsi per le induttanze mutuamente accoppiate, che sono un altro esempio di elemento reciproco.

- Un esempio di una rete lineare non reciproca è data dai generatori pilotati.

A questo punto enunciamo il teorema di reciprocità:

Una rete NR qualsiasi composta di elementi reciproci (quindi non deve contenere generatori indipendenti), a stato zero e non degenere è reciproca.

Questo significa che individuando un certo numero di porte **N** e considerando due situazioni diverse alle **N**-porte è verificata la condizione di reciprocità.

Dim. Per la dimostrazione si fa uso del teorema di Tellegen. Si consideri la rete **NR** con **L** lati e **B** nodi che soddisfa le precedenti ipotesi e si individuino

[3] Il dominio trasformato p può essere inteso sia come dominio di Laplace (s) sia come dominio della frequenza ($j\omega$)

come detto **N** porte[4]. Una volta inseriti i generatori di tensione e corrente alle **N** porte relativi ad una delle due situazioni elettriche la rete risultante sarà formata da $L + N$ lati. Si numerino i lati nuovi aggiunti per primi $1 \dots N$ e di seguito i lati della rete originale. Per le due diverse situazioni elettriche (a) e (b) considerate alle porte, si indicano con l'apice (a) le tensioni e le correnti di lato relative alla situazione elettrica (a) e con l'apice (b) le grandezze elettriche relative alla situazione elettrica (b). Poichè le tensioni e le correnti di lato in entrambe le situazioni soddisfano le medesime LKT e LKC è possibile applicare il teorema di Tellegen e scrivere

$$\sum_{l=1}^{N} v_l(t)^{(a)} \cdot i_l(p)^{(b)} + \sum_{l=N+1}^{L+N} v_l(p)^{(a)} \cdot i_l(p)^{(b)} = 0$$

e

$$\sum_{l=1}^{N} v_l(p)^{(b)} \cdot i_l(p)^{(a)} + \sum_{l=N+1}^{L+N} v_l(p)^{(b)} \cdot i_l(p)^{(a)} = 0$$

I termini $\sum_{l=N+1}^{L+N} v_l(p)^{(a)} \cdot i_l(p)^{(b)}$ e $\sum_{l=N+1}^{L+N} v_l(p)^{(b)} \cdot i_l(p)^{(a)}$ sono dovuti ai componenti della rete NR data relativamente alle due situazioni elettriche diverse. Ma tali lati per ipotesi sono reciproci e di conseguenze i due termini relativi alle sommatorie sono uguali. Ne consegue che:

$$\sum_{l=1}^{N} v_l(p)^{(a)} \cdot i_l(p)^{(b)} = \sum_{l=1}^{N} v_l(p)^{(b)} \cdot i_l(p)^{(a)}$$

Il che dimostra che la rete è reciproca. *Osservazioni*:

- la passività non ha niente a che vedere con la reciprocità, nel senso che ci sono reti passive che non sono reciproche (ad esempio il giratore, che è un doppio bipolo LTI che non assorbe né cede energia, ed è quindi passivo).
- Se si suppone di estrarre dalla rete due coppie di terminali (cioè due porte) ne consegue che se la rete è reciproca:

[4]Il problema dell'individuazione di una porta si considera in termini di due diversi tipi di connessioni, a tenaglia ed a saldatura. Si ricordi a tal proposito che individuare una porta a cui collegare un generatore di corrente significa accedere a due nodi della rete con il generatore di corrente (connessione a saldatura), mentre individuare una porta a cui collegare un generatore di tensione significa effettuare un taglio su un lato creando due nuovi nodi e collegare qui il generatore di tensione (connessione a tenaglia).

1. se si collega un generatore di tensione $e_s(\cdot)$ alla porta (1) e si osserva la corrente $i_o(\cdot)$ alla porta (2) cortocircuitata, allora collegando alla porta (2) $e_s(\cdot)$ la corrente alla porta (1) cortocircuitata sarà $i_o(\cdot)$
2. se si collega un generatore di corrente $i_s(\cdot)$ alla porta (1) e si osserva la tensione $e_o(\cdot)$ alla porta (2) aperta, allora collegando alla porta (2) $i_s(\cdot)$ la tensione alla porta (1) aperta sarà $e_o(\cdot)$
3. se si collega un generatore di corrente $i_s(\cdot)$ alla porta (1) e si osserva la corrente $i_o()$ alla porta (2) cortocircuitata; se si collega alla porta (2) $e_s(\cdot)$ e si osserva alla porta (1) aperta la tensione $e_o(\cdot)$ e se le due forme d'onda $i_s(\cdot)$ e $e_s(\cdot)$ sono uguali allora anche le due forme d'onda $i_o(\cdot)$ e $e_o(\cdot)$ sono uguali.

.