

# Circuiti Magnetici

A. Laudani

October 12, 2011

## Introduzione ai circuiti magnetici

Le equazioni di Maxwell

Modello quasi-stazionario magnetico

## Circuiti magnetici

Il flusso d'induzione

La tensione magnetica

Grafo di un circuito magnetico, leggi di Kirchhoff e relazioni costitutive

Riluttanza

Legge di Hopkinson

Dualità tra circuiti magnetici e circuiti elettrici

# Introduzione

- ▶ Il campo magnetico generato da un sistema di correnti elettriche é generalmente diffuso in tutto lo spazio.
- ▶ In pratica però spesso si considerano campi magnetici (generati da correnti di conduzione) localizzati essenzialmente in una regione limitata dello spazio, tutta o in parte circondata dai conduttori di eccitazione.
- ▶ Ciò avviene nel caso in cui il campo é generato da conduttori avvolti intorno ad un nucleo formato con un metallo del gruppo del ferro (ferro, cobalto, nichel, ecc) o da loro leghe particolari.

- ▶ Molti dispositivi elettrici (trasformatore, motori elettrici, ecc) basano il loro funzionamento sull'interazione delle correnti che attraversano avvolgimenti elettrici in presenza di materiali magnetici.
- ▶ Molto spesso questa interazione é complicata dalla presenza di parti in movimento e quindi da una trasformazione di energia meccanica in elettromagnetica e viceversa.
- ▶ La trattazione di tali strutture richiede l'analisi oltre che dei circuiti a parametri concentrati relativi agli avvolgimenti, dei cosiddetti *circuiti magnetici*, che vengono usati per la descrizione del comportamento della parte magnetica delle strutture considerate.
- ▶ Il loro uso é valido sotto ipotesi semplificative.

# Derivazione delle equazioni fondamentali dei circuiti magnetici dalle equazioni di Maxwell

- ▶ La struttura fisica che consideriamo é costituita da un insieme di materiali magnetici ed ha lo scopo di stabilire una determinata configurazione del campo magnetico sotto l'azione di avvolgimenti elettrici adeguatamente eccitati.
- ▶ La conoscenza della forma e della natura dei corpi facenti parte della struttura in questione e delle sollecitazioni impresse attraverso gli avvolgimenti rende possibile l'individuazione delle grandezze che definiscono il campo magnetico in ogni punto della regione.
- ▶ Tali grandezze sono:
  1. il campo magnetico  $\vec{H}$ ,
  2. l'induzione magnetica  $\vec{B}$ .

## Le equazioni di Maxwell

Le grandezze precedenti sono in generale funzioni del punto e del tempo e sono legate, tramite le equazioni di Maxwell, ai vettori  $\vec{\mathbf{E}}$  (campo elettrico) e  $\vec{\mathbf{D}}$  (induzione elettrica):

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{D}} = \rho \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0 \quad (2)$$

$$\nabla \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\nabla \times \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{J}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t} \quad (4)$$

Accanto alle equazioni precedenti occorre tenere presente il legame tra  $\vec{\mathbf{B}}$  ed  $\vec{\mathbf{H}}$  imposto dal mezzo, cioè l'equazione costitutiva

$$\vec{\mathbf{B}} = \mu \vec{\mathbf{H}} = \mu_r \mu_0 \vec{\mathbf{H}} \quad (5)$$

in cui

1.  $\mu$  é la permeabilit  magnetica del mezzo ;
2.  $\mu_0$  é la permeabilit  magnetica del vuoto;
3. e  $\mu_r$  é la permeabilit  magnetica relativa.

La permeabilit  magnetica é spesso funzione di  $\vec{\mathbf{H}}$  in quanto i mezzi di interesse sono non-lineari <sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>E non solo: in questo caso é stata fatta l'ipotesi di mezzo isotropo, se no avremmo dovuto utilizzare un tensore. Inoltre abbiamo anche a che fare con il fenomeno dell'isteresi.

## Circuiti Magnetici: Modello quasi-stazionario magnetico

- ▶ Il modello utilizzato per analizzare detti circuiti é quello quasi-stazionario magnetico, in cui si approssima l'evoluzione del campo magnetico come successione di configurazioni, che possono essere calcolate esclusivamente in base alla distribuzione della densità di corrente, che si suppone mantenere nel tempo la proprietà di solenoidalità ( $\text{div} \vec{\mathbf{J}} = 0$ ).
- ▶ Questo equivale a dire che la velocità di propagazione sia infinita nelle regioni che costituiscono la struttura magnetica in esame, ossia nell'equazione (4) mancherà il termine corrispondente alla corrente di spostamento.



- ▶ Sotto queste ipotesi le uniche sorgenti del campo magnetico sono dovute al vettore densità di corrente di conduzione  $\vec{\mathbf{J}}$ .
- ▶ Questo permette di stabilire una catena di cause-effetti fra le grandezze elettricomagnetiche:
  1. Azione del circuito elettrico (avvolgimento di eccitazione) sul circuito magnetico  $\nabla \times \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{J}}$ ;
  2. Intervento del mezzo magnetico:  $\vec{\mathbf{B}} = \mu \vec{\mathbf{H}}$ ;
  3. Reazione sul circuito elettrico:  $\nabla \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}$ .

## Il flusso d'induzione

- La struttura magnetica d'interesse é costituita da una o piú regioni di spazio occupate da materiali omogenei, aventi conducibilità elettrica nulla e permeabilità magnetica diversa da zero.

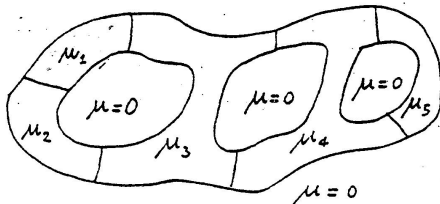


Figure: Schematizzazione della generica struttura magnetica

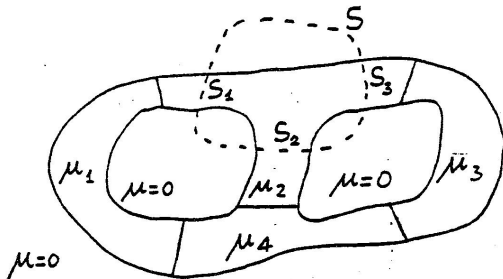
- ▶ Tali regioni sono per ipotesi tra loro contigue e costituiscono nel loro complesso una figura solida a connessione multipla.
- ▶ Un'ipotesi semplificativa assai utile é quella di supporre la struttura magnetica immersa in una regione a permeabilità nulla, ossia l'induzione  $\vec{B}$  é diversa da zero solo all'interno della struttura magnetica.
- ▶ D'altra parte ciò costituisce una buona approssimazione di quello che accade in realtà nelle applicazioni d'interesse, dove i materiali magnetici usati sono caratterizzati da una permeabilità relativa molto elevata.

## Circuiti Magnetici: tubi di flusso

- ▶ I circuiti magnetici, quando si trascuri completamente il campo magnetico all'esterno di essi, si possono assimilare ad un insieme di tubi di flusso magnetico che incanalano l'induzione prodotta da un circuito elettrico di eccitazione di spire opportunamente concatenate con il circuito.
- ▶ Di conseguenza risulta utile definire il concetto di flusso di induzione.

## Circuiti Magnetici

- ▶ Consideriamo una superficie chiusa  $S$  che interseca la struttura magnetica in corrispondenza delle sue porzioni  $S_1, S_2$  e  $S_3$



Allora dalla equazione di Maxwell sulla divergenza di  $\vec{\mathbf{B}}$ :

$$\oint_S \vec{\mathbf{B}} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (6)$$

ne segue che:

$$\int_{S_1} \vec{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \int_{S_2} \vec{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \int_{S_3} \vec{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0 \quad (7)$$

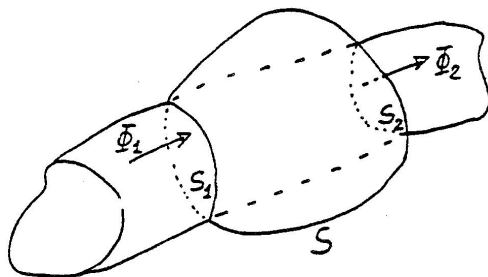
# Circuiti Magnetici

- ▶ Definendo come flusso d'induzione  $\Phi_i$  attraverso la superficie  $S_i$  la quantità:

$$\Phi_i = \oint_{S_i} \vec{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (8)$$

- ▶ la (7) si scrive  $\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0$ ,
- ▶ e nell'ipotesi che le superficie  $S_i$  siano  $N$  diviene

$$\sum_{i=1}^N \Phi_i = 0 \quad (9)$$



Se si applica la (7) ad una struttura magnetica avente connessione semplice si ottiene:

$$\Phi_1 = \Phi_2 \quad (10)$$



## Circuiti Magnetici: Proprietá 1

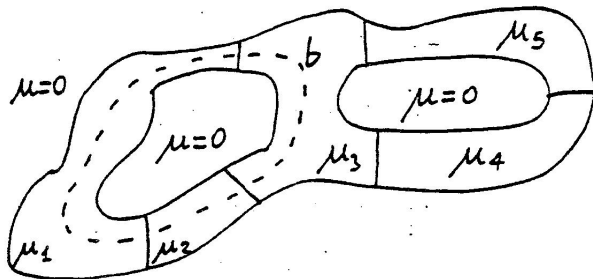
- ▶ Quindi in conclusione vale la seguente proprietá.
- ▶ *Proprietá 1*: una regione a connessione semplice é caratterizzata da un flusso univocamente definito ed indipendente dalla forma e posizione delle superfici sulle quali é calcolato il flusso.
- ▶ Nel caso di strutture magnetiche a connessione multipla la proprietá 1 comporta la possibilitá di sostituire alla grandezza locale  $\vec{\mathbf{B}}$  la grandezza globale  $\Phi$ .

## Circuiti Magnetici: Proprietá 2

- ▶ *Proprietá 2*: la somma dei flussi entranti in una superficie chiusa, che taglia le varie regioni di una struttura magnetica, é uguale a zero.
- ▶ Questa seconda proprietá é del tutto analoga alla legge di Kirchhoff per le correnti alle superfici gaussiane e per questo viene ad essere spesso indicata, nell'ambito dei circuiti magnetici, come legge di Kirchhoff dei flussi.

## La tensione magnetica

Si consideri una linea chiusa  $b$  il cui percorso sia totalmente interno alla struttura magnetica considerata



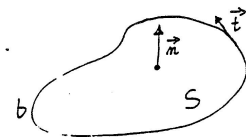
Detta  $S$  una superficie avente  $b$  come bordo si ha:

$$\int_S \nabla \times \vec{H} \cdot \hat{n} dS = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS \quad (11)$$

che diviene per il teorema di Stokes

$$\int_b \vec{H} \cdot \hat{t} dl = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS \quad (12)$$

in cui  $\hat{t}$ , il versore tangente alla linea  $b$ , e  $\vec{n}$ , la normale alla superficie  $S$ , sono scelti con versi coordinati come nella seguente figura.



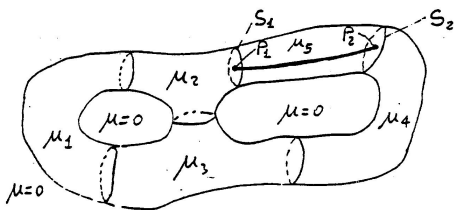
- ▶ Di conseguenza il campo magnetico  $\vec{H}$  risulta conservativo o meno a seconda che sia assente o presente la densità di correnti  $\vec{J}$  nella regione considerata.
- ▶ Tenendo conto dell'ipotesi che sia nulla la conducibilità elettrica della struttura magnetica si ha in ogni caso  $\vec{J} = 0$  nell'interno di essa.
- ▶ Quindi l'integrale a secondo membro della (12) è diverso da zero solo per la presenza di correnti in eventuali circuiti elettrici esterni alla struttura magnetica e concatenati con essa.

In base a queste considerazioni si deduce che in una regione a connessione semplice della struttura magnetica risulta sempre

$$\int_b \vec{\mathbf{H}} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = 0 \quad (13)$$

in quanto esistono superfici con bordo  $b$  contenute totalmente nella regione stessa.

Ciò implica che, fissate le superfici di ingresso ed uscita della regione ( $S_1$  e  $S_2$ ) e su queste due punti  $P_1$  e  $P_2$ , come in figura,



è univocamente definita l'espressione

$$W_{P_1, P_2} = \int_{\gamma} \vec{H} \cdot \hat{t} dl \quad (14)$$

dove l'integrale s'intende esteso ad una qualsiasi curva interna  $\gamma$  alla regione e congiungente i due punti  $P_1$  e  $P_2$ .

$W_{P_1, P_2}$  viene chiamata tensione magnetica tra  $P_1$  e  $P_2$ .

- ▶ Vale la seguente proprietà (proprietà 3): "Una regione a connessione semplice è caratterizzabile da una tensione magnetica, definibile in modo univoco una volta che siano precisati i punti delle superfici di ingresso tra cui considerarla".
- ▶ Quanto detto mette in evidenza la necessità di precisare per ciascuna regione di una struttura magnetica le superfici di ingresso e su queste un punto di riferimento.
- ▶ Nel caso di una regione a connessione multipla si possono definire nello stesso modo le tensioni magnetiche delle superfici di ingresso rispetto ad una di esse presa come riferimento.



- ▶ Consideriamo infine una linea chiusa interna alla struttura magnetica che passi per i punti di riferimento delle varie superfici terminali delle regioni.
- ▶ Applicando la (12) si ha che la somma delle tensioni magnetiche applicate alle varie regioni successivamente toccate é uguale alla somma delle eventuali correnti entranti in una superficie avente per bordo la linea considerata e dovute ad avvolgimenti concatenati con la struttura magnetica.
- ▶ É evidente che questo termine é l'effetto di un'azione esterna alla struttura magnetica e pertanto va considerata come se fosse impressa dall'esterno, cioè siamo in presenza di un generatore di tensione magnetica.
- ▶ A tale tensione impressa si dá il nome di *forza magneto-motrice*.

## Proprietá 4

- ▶ Possiamo riassumere quanto detto finora enunciando la seguente proprietá 4.
- ▶ *Proprietá 4*: la somma algebrica delle tensioni magnetiche delle regioni attraversate da una linea chiusa interna ad una struttura magnetica é uguale alla forza magneto motrice impressa da eventuali avvolgimenti concatenati con essa, coincidenti con la corrente che attraversa una superficie avente la linea considerata come bordo.

## Grafo di un circuito magnetico, leggi di Kirchhoff e relazioni costitutive

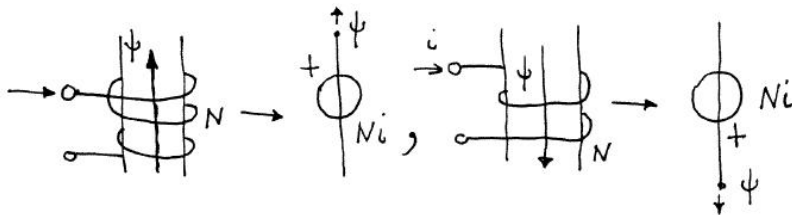
- ▶ Supponiamo che ciascuna regione della struttura magnetica sia accessibile da due superfici.
- ▶ In questo caso fissati i punti di riferimento su tali superfici, sono univocamente definite la tensione magnetica ed il flusso relative alla generica regione.
- ▶ In base alle proprietà 2 e 4, è possibile allora parlare di circuito magnetico e di grafo relativo, ottenuti sostituendo a ciascuna regione un bipolo ed inserendo opportunamente i generatori di forza magneto-motrice.
- ▶ Le proprietà 2 e 4 equivalgono alle leggi di Kirchhoff per tali particolari circuiti.

- ▶ Per completare la caratterizzazione del circuito magnetico rimangono da individuare le relazioni costitutive dei componenti ideali che lo costituiscono.
- ▶ I componenti ideali introdotti sono due:
  1. il bipolo che corrisponde ad una regione avente conducibilità elettrica nulla e permeabilità
  2. il generatore di forza magneto-motrice

Essendo chiaro il significato del secondo, rimane da caratterizzare il primo.

## Convenzioni per i generatori di f.m.m.

Valgono le seguenti convenzioni per i versi dei generatori di forza magnetomotrice



## Riluttanza

- ▶ Il legame tra il flusso  $\Phi$  e l'induzione magnetica  $\vec{\mathbf{B}}$  nei punti interni alla regione considerata dipende dalla forma geometrica della regione stessa e dal modo in cui è distribuito il campo vettoriale.
- ▶ Nel caso lineare si ha:

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{f}}(P) \cdot \Phi \quad (15)$$

dove  $\vec{\mathbf{f}}(P)$  è una funzione del punto  $P$  interno alla regione considerata, che tiene conto delle proprietà del campo vettoriale .

## Circuiti Magnetici

- ▶ Un legame analogo sussiste nel caso lineare tra il campo vettoriale  $\vec{\mathbf{H}}$  ed il valore della tensione magnetica  $W_{P_1 P_2}$

$$\vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{g}}(P) \cdot W_{P_1 P_2} \quad (16)$$

dove  $(P)$  é una funzione dipendente dal punto  $P$  che tiene conto delle proprietà del campo  $\vec{\mathbf{H}}$ .

- ▶ Dalla relazione costitutiva  $\vec{\mathbf{B}} = \mu \vec{\mathbf{H}}$  si ha:

$$W_{P_1 P_2} = \frac{|\vec{\mathbf{f}}(P)|}{\mu |\vec{\mathbf{g}}(P)|} \Phi \quad (17)$$

Chiameremo la quantità  $R = \frac{|\vec{\mathbf{f}}(P)|}{\mu |\vec{\mathbf{g}}(P)|}$  riluttanza magnetica.

## Legge di Hopkinson

- ▶ Più precisamente si ha:

$$W_{P_1 P_2} = R\Phi \quad (18)$$

che costituisce la legge di Hopkinson.

- ▶ La determinazione del valore della riluttanza  $R$  può essere fatta in modo semplice solo in casi elementari, nei quali è nota la distribuzione del campo all'interno della regione considerata. La determinazione esatta è sempre molto complicata, essendo necessario individuare preventivamente la distribuzione del campo magnetico e dell'induzione, in base alle condizioni al contorno, derivanti dalla forma delle superfici esterne alla regione stessa.

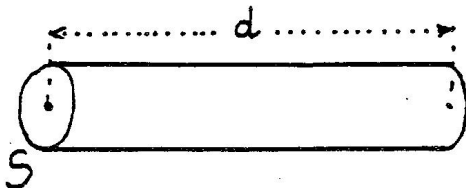


- ▶ È opportuno osservare a tale proposito che i risultati dipendono anche dalle regioni contigue che influenzano la forma del campo vettoriale d'interesse.
- ▶ Inoltre il valore della tensione magnetica dipende dalla scelta dei punti  $P_1$  e  $P_2$ , che sono in generale arbitrari.

- ▶ Un modo usuale per ottenere risultati di prima approssimazione é quello di ritenere valide le seguenti ipotesi:
  1. campo magnetico  $\vec{H}$  uniforme e diretto secondo l'asse di ciascuna regione a connessione semplice.
  2. Induzione magnetica  $\vec{B}$  uniforme e diretta secondo l'asse di ciascuna regione a connessione semplice.
  3. I punti  $P_1$  e  $P_2$  sono scelti al centro delle superfici di base di ciascuna regione.

Nell'ambito di queste ipotesi, detta  $d$  l'altezza ed  $S$  l'area della base del cilindro, si ottiene:

$$R = \frac{d}{\mu S} \quad (19)$$

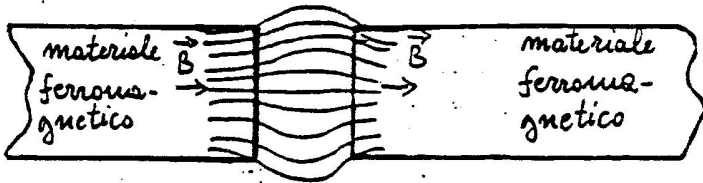


## Traferri

- ▶ Nello studio dei circuiti magnetici si fa l'ipotesi che all'esterno della struttura magnetica.
- ▶ Unica eccezione a tale situazione è quella dei traferri (ossia delle brevi interruzioni del materiale ferromagnetico) in cui si assume una permeabilità pari a  $\mu_0$ , cosicché è possibile definire la riluttanza anche per i traferri.
- ▶ Poiché nei materiali ferromagnetici  $\mu \gg \mu_0$  allora si ha che quando in un circuito magnetico è presente un traferro, la riluttanza di questo è predominante rispetto alle riluttanze delle porzioni costituite da materiale ferromagnetico.

## Circuiti Magnetici

- ▶ É evidente che in tal caso il valore ottenuto é approssimato per eccesso, in quanto l'induzione interessa una superficie maggiore di quella delle superficie contigue.



## Dualità tra circuiti magnetici e circuiti elettrici

Un circuito magnetico può studiato come un circuito elettrico una volta stabilite le seguenti analogie:

Circuito magnetico	Circuito elettrico
Maglia	Maglia
Taglio	Taglio
Flusso	Corrente
Tensione magnetica	Tensione
Forza magneto-motrice	Generatore di tensione
Riluttanza	Resistenza $R$
Proprietà 2	Legge di Kirchhoff delle correnti (LKC)
Proprietà 3	Legge di Kirchhoff delle tensioni (LKT)

# Interazione tra una struttura magnetica e un avvolgimento ad essa concatenato: l'induttore

