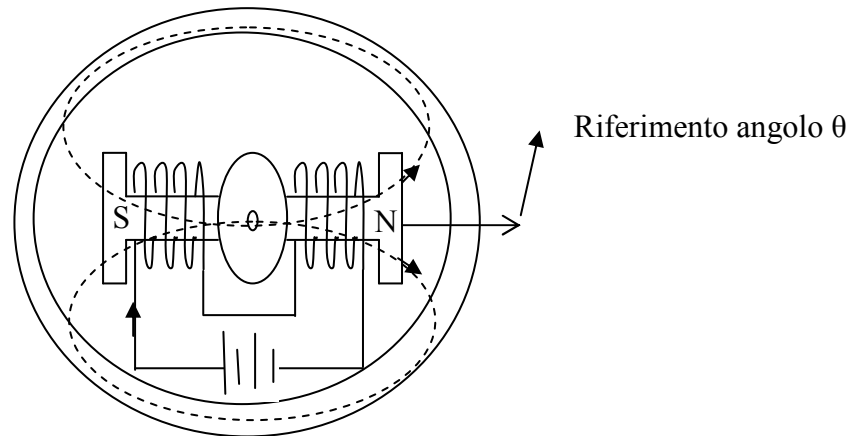


APPUNTI SUL CAMPO MAGNETICO ROTANTE

• Campo Magnetico Rotante ad una coppia polare

Consideriamo la struttura in figura che rappresenta la vista, in sezione trasversale, di un cilindro cavo, costituito da un materiale ad alta permeabilità relativa, in cui è alloggiato un elettromagnete opportunamente sagomato ed alimentato da una corrente continua. L'elettromagnete, il cui nucleo è anch'esso ad alta permeabilità, è libero di ruotare, sia in senso orario sia antiorario, intorno al proprio asse centrale qualora venisse messo in rotazione da un motore primo esterno. Nel seguito chiameremo, in gergo, "ferro" ogni materiale ad alta permeabilità relativa.



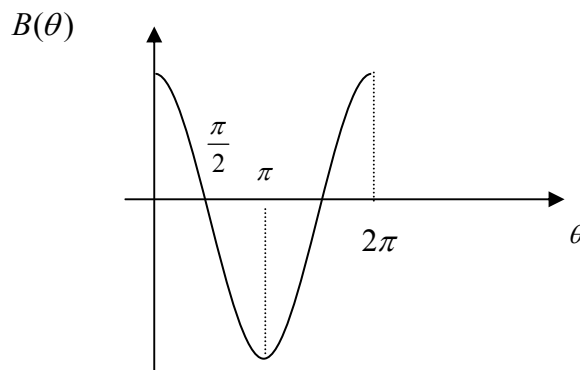
Tra la parte mobile (rotore) e quella fissa (statore) c'è uno spazio in aria (permeabilità relativa unitaria) che è detto **traferro**. La riluttanza dell'aria risulta, in generale, essere molto più grande di quella del ferro in virtù dell'alta permeabilità di quest'ultimo che è $\gg 1$. Quindi si ha:

$$R_{Aria} + R_{Fe} \cong R_{Aria}$$

Ciò ci permette di considerare che tutta la forza magnetomotrice relativa alla struttura in esame sia concentrata nel traferro.

Assumiamo inoltre che la particolare sagomatura dell'elettromagnete produca nel traferro una distribuzione spaziale di induzione sinusoidale. Per un assegnato sistema di riferimento di coordinata angolare θ la distribuzione dell'induzione, al traferro, a rotore fermo sia:

$$B(\theta) = B_M \cos(\theta)$$



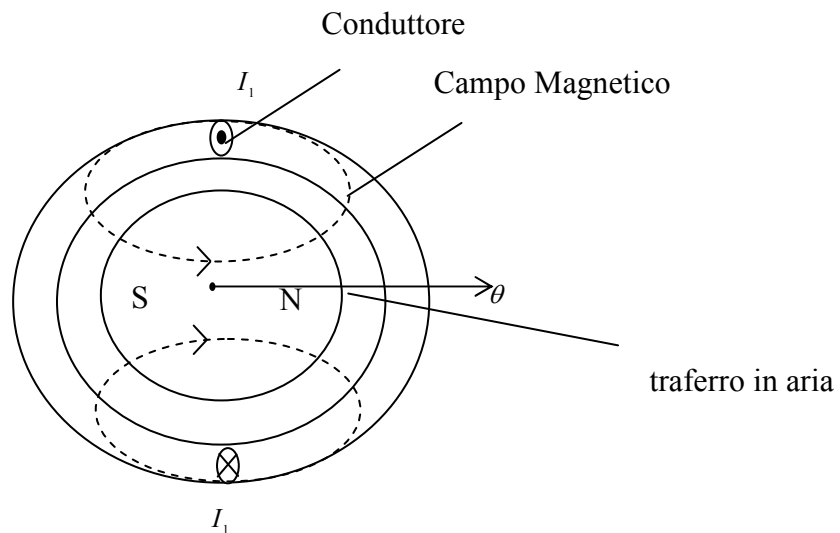
Se adesso si fa ruotare il rotore ad una velocità angolare Ω si potrà scrivere, relativamente ad un osservatore fisso esterno alla struttura:

$$B(\theta, t) = B_M \cos(\Omega t \pm \theta)$$

dove il segno \pm indica il fatto che la rotazione impressa può essere oraria o antioraria rispetto all'osservatore.

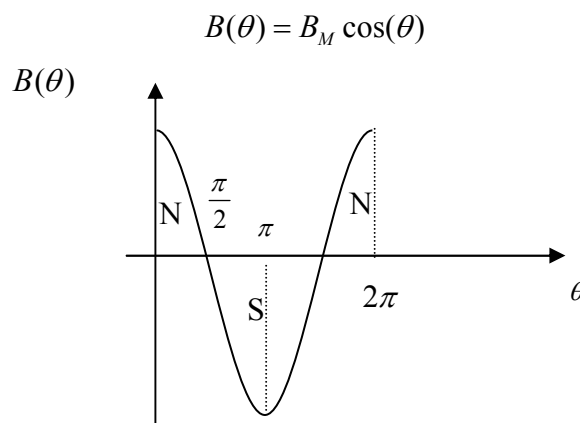
La precedente espressione è dunque la descrizione matematica relativa ad un campo magnetico rotante generato da una rotazione meccanica di un elettromagnete a 1 coppia polare Nord (N) – Sud (S).

Vediamo ora come sia possibile generare un analogo campo magnetico rotante al traferro senza operare un'effettiva rotazione meccanica ma attraverso adeguate correnti fluenti variabili nel tempo e fluenti in conduttori alloggiati in opportune cave realizzate nello statore



(Ricordiamo che: $B = \mu_0 H$ con $H \propto I$)

Se le correnti fossero correnti continue, e immaginando che le cave siano più delle due disegnate in figura e che occupino quindi un settore circolare di statore, si è sicuramente in grado di realizzare un campo magnetico statico al traferro che abbia distribuzione spaziale ancora di tipo sinusoidale nel sistema di riferimento di coordinata angolare (detta anomalia) θ . Si avrà che, assegnato segno positivo al polo Nord (N) e viceversa a quello Sud (S):



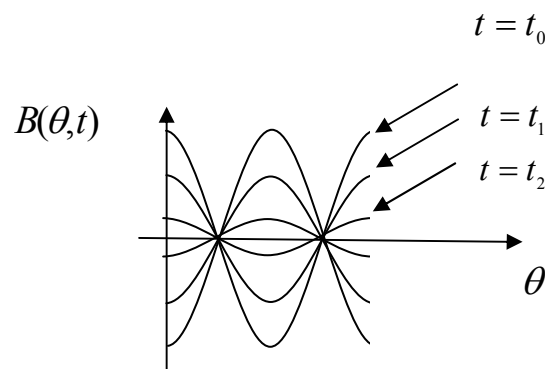
Alimentiamo ora i conduttori di statore con un generatore di corrente che varia nel tempo in modo puramente sinusoidale con pulsazione ω :

$$I(t) = I_M \cos(\omega t)$$

La relativa forza magnetomotrice prodotta al traferro, e quindi l'induzione, saranno anch'essi sinusoidali e dipendenti dall'anomalia ϑ . Un osservatore esterno alla struttura vedrà nel traferro un campo pari a :

$$B(\theta, t) = B_M \cos(\omega t) \cos(\theta)$$

Che è un campo pulsante nel tempo (onda stazionaria). In figura riportiamo l'andamento dell'induzione per tre istanti di tempo diversi



Da un punto di vista matematico possiamo decomporre il campo pulsante utilizzando semplici relazioni trigonometriche:

$$B(\theta, t) = \frac{B_M}{2} [\cos(\omega t + \theta) + \cos(\omega t - \theta)]$$

Ci si accorge immediatamente che l'onda stazionaria può essere vista come la sovrapposizione di due campi magnetici, ciascuno rotante in verso opposto all'altro (uno verso orario = inverso, l'altro antiorario = diretto).

In presenza di un campo rotante dovuto ad un elettromagnete è evidente che un osservatore in moto solidalmente con il rotore non vedrebbe alcuna variazione di induzione nel tempo, cioè misurerebbe un campo costante.

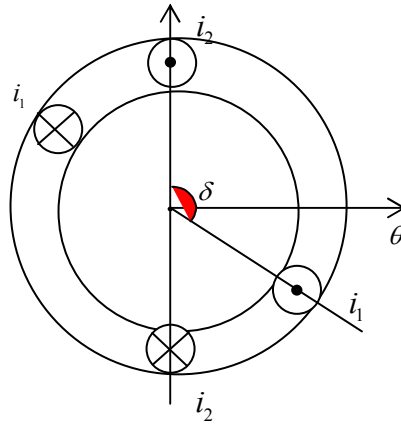
La velocità di rotazione dei due campi diretto e inverso si può allora calcolare semplicemente ponendo a zero la derivata dell'argomento di ciascuno dei due coseni delle componenti del campo totale:

$$\frac{d}{dt} [\omega t + \theta] = 0 \Rightarrow \omega + \frac{d\theta}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = -\omega \quad (\text{campo inverso})$$

$$\frac{d}{dt} [\omega t - \theta] = 0 \Rightarrow \omega - \frac{d\theta}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \omega \quad (\text{campo diretto})$$

Quindi la pulsazione elettrica ω svolge lo stesso ruolo della velocità meccanica Ω .

Per ottenere allora un effettivo campo magnetico rotante basta sopprimere o il campo orario o quello antiorario. Si può operare come segue:



Si dispongono sullo statore due avvolgimenti, meccanicamente “sfasati” di un angolo δ , come in figura, e percorsi da correnti di uguale ampiezza ma sfasate nel tempo di una quantità α :

$$i_1(t) = I_M \cos(\omega t) \text{ e } i_2(t) = I_M \cos(\omega t + \alpha)$$

Nel traferro le due induzioni, che ciascuna corrente è in grado di produrre, possono essere sommate (il mezzo nel traferro è lineare).

Si avrà per l'induzione totale:

$$B(\theta, t) = B_M \cos(\omega t) \cdot \cos(\theta) + B_M \cos(\omega t + \alpha) \cdot \cos(\theta + \delta)$$

Quindi:

$$B(\theta, t) = \frac{B_M}{2} [\cos(\omega t + \theta) + \cos(\omega t - \theta)] + \dots + \frac{B_M}{2} [\cos(\omega t + \alpha + \theta + \delta) + \cos(\omega t + \alpha - \theta - \delta)]$$

(la sovrapposizione è lecita assumendo la μ dell'aria lineare e $\mu_{ferro} \rightarrow \infty$ cioè la riluttanza

$$R_{ferro} \rightarrow 0)$$

Facciamo in modo che i due campi inversi si elidano:

$$\cancel{\omega t} + \cancel{\theta} = \cancel{\omega t} + \alpha + \cancel{\theta} + \delta \pm \pi$$

(se la differenza tra gli angoli è in modulo π i due coseni si annullano)

Infine massimizziamo il campo massimo del campo diretto ponendo

$$\cancel{\omega t} + \cancel{\theta} = \cancel{\omega t} + \alpha + \cancel{\theta} + \delta$$

Dunque:

$$\begin{cases} \alpha + \delta = \pm\pi \\ \alpha - \delta = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \delta = \alpha \\ \alpha = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

In tal modo si è creato un campo magnetico-rotante Bifase

$$i_2 = I_M \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

$$i_1 = I_M \cos(\omega t)$$

Campo magneto-rotante Trifase

In accordo con quanto fatto in precedenza, disponiamo ora sullo statore 3 avvolgimenti.

I tre avvolgimenti siano alimentati con una terna trifase simmetrica di correnti.

Fissato come riferimento, lo spostamento angolare meccanico del primo avvolgimento avremo:

Induzione dovuta al primo avvolgimento:

$$B_1(\theta, t) = B_M \cos(\omega t) \cos(\theta)$$

Induzione dovuta al secondo avvolgimento:

$$B_2(\theta, t) = B_M \cos(\omega t - \frac{2}{3}\pi) \cos(\theta + \delta_2)$$

Induzione dovuta al terzo avvolgimento:

$$B_3(t) = B_M \cos(\omega t - \frac{4}{3}\pi) \cos(\theta + \delta_3)$$

L'induzione totale si otterrà dalla somma delle tre induzioni precedenti.

Avremo:

$$B_1(t) = \frac{B_M}{2} [\cos(\omega t + \theta) + \cos(\omega t - \theta)] +$$

$$\dots + \frac{B_M}{2} [\cos(\omega t - \frac{2}{3}\pi + \theta + \delta_2) + \cos(\omega t - \frac{2}{3}\pi - \theta - \delta_2)]$$

$$\dots + \frac{B_M}{2} [\cos(\omega t - \frac{4}{3}\pi + \theta + \delta_3) + \cos(\omega t - \frac{4}{3}\pi - \theta - \delta_3)]$$

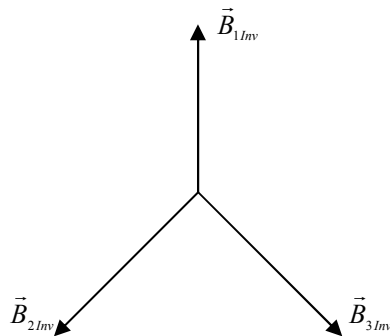
Facciamo ora in modo che i diretti si sommino in fase. E' ovvio che deve essere:

$$\delta_2 = -\frac{2}{3}\pi \text{ e } \delta_3 = -\frac{4}{3}\pi$$

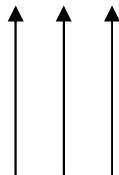
Sostituendo tali valori ai campi inversi si trova che la loro somma è nulla. Infatti:

$$B_{inverso}(\theta, t) = \frac{B_M}{2} [\cos(\omega t + \theta) + \cos(\omega t + \theta - \frac{4}{3}\pi) + \cos(\omega t + \theta - \frac{8}{3}\pi)]$$

Come si può facilmente verificare ragionando con i fasori relativi:



Quindi rimane solo la somma dei campi diretti



$$B(\theta, t) = \frac{3}{2} B_M \cos(\omega t - \theta)$$

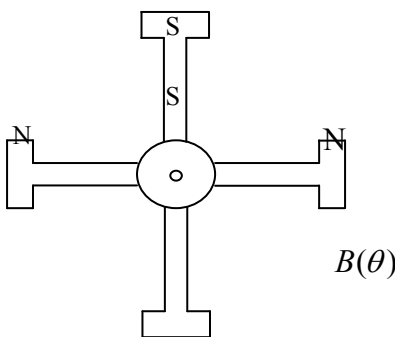
Questo campo rotante è quello ovviamente utilizzato nei sistemi trifase.

Ricapitolando, nel caso di elettromagnete rotante, se n_r indica i giri al minuto di rotore, la velocità angolare meccanica varrà $\Omega = \frac{2\pi n_r}{60}$. Nel caso di campo magnetico generato dallo statore la velocità del campo, indicata con n , è direttamente legata alla frequenza dalle relazioni:
 $f = 50\text{Hz} \rightarrow n = 60f$, dunque i giri al minuto del campo magnetico rotante per una coppia polare sono pari a 3000 giri/minuto.

- **Campo Magnetico Rotante a $p > 1$ coppie polari**

Il campo fin qui visto è un campo a una coppia polare perché generato da una sola coppia polare Nord e Sud.

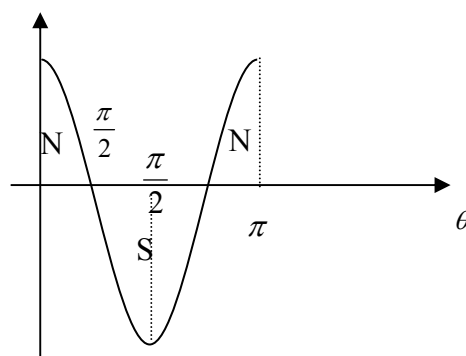
Per realizzare una configurazione a due coppie polari nel caso dell'elettromagnete rotante, è necessario aggiungere un altro paio di bracci al magnete:



In tal caso l'ascissa angolare passa ora dal valore θ a 2θ

Infatti per due coppie polari si ha

$$B(\theta) = B_M \cos(2\theta)$$



E il campo magnetico rotante assume la forma:

$$B(\theta, t) = B_M \cos(\omega t \pm 2\theta)$$

per cui la velocità del campo varrà ora, considerando il campo diretto:

$$\frac{d}{dt}(\omega t - 2\theta) = 0 \Rightarrow \omega - 2 \frac{d\theta}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = + \frac{\omega}{2}$$

Quindi la velocità di rotazione si è dimezzata

Estensione:

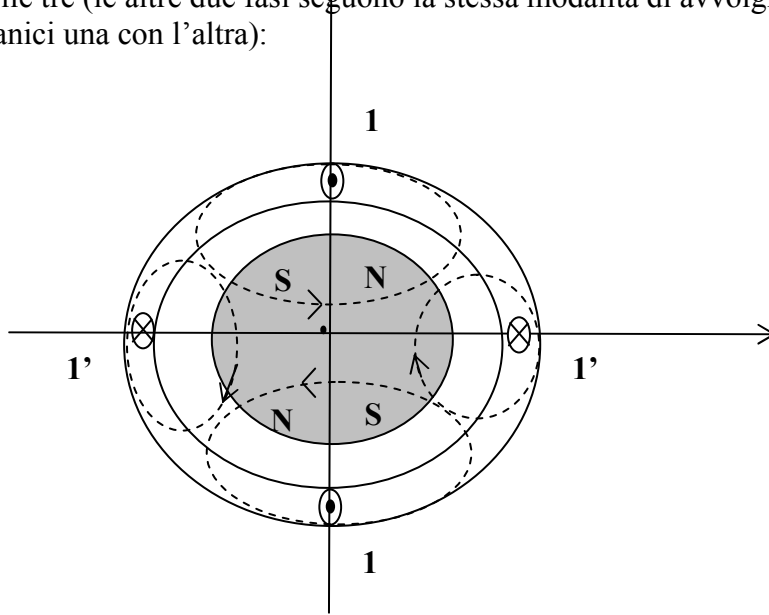
Più in generale per p coppie polari si avrà:

$$B(\theta, t) = B_M \cos(\omega t \pm p\theta)$$

per cui la velocità del campo varrà ora, considerando il campo diretto:

$$\frac{d}{dt}(\omega t - p\theta) = 0 \Rightarrow \omega - p \frac{d\theta}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = + \frac{\omega}{p}$$

Per ottenere un'analogia espressione nel caso di generazione di un campo magnetico trifase rotante di statore occorrerà realizzare p coppie polari per ciascuno dei tre avvolgimenti. In figura è riportato un esempio, relativo a $p = 2$, dove per semplicità si riporta solo la modalità di avvolgimento di una sola fase delle tre (le altre due fasi seguono la stessa modalità di avvolgimento e sono sfasate di 120 gradi meccanici una con l'altra):



Ricapitolando per p coppie polari:

nel caso di campo magnetico generato dallo statore la velocità del campo, indicata con n , è

direttamente legata alla frequenza dalle relazioni: $f = 50\text{Hz} \rightarrow n = \frac{60f}{p}$, così ad esempio il numero giri al minuto del campo magnetico rotante per 2 coppie polari è 1500 giri/minuto.