

APPUNTI INTEGRATIVI SULLA PARTE INTRODUTTIVA DEL CORSO DI TEORIA DEI CIRCUITI

I presenti appunti costituiscono una traccia sulla parte introduttiva della Teoria dei Circuiti svolta a lezione. Si invitano comunque gli studenti ad adoperare le presenti note solo come sussidio, e non in sostituzione, dei fondamentali libri di testo consigliati.

Si ringraziano fin da adesso tutti coloro che vorranno segnalare gli eventuali errori e/o le imprecisioni che avranno riscontrato nel testo durante la lettura.

BREVI RICHIAMI DI ELETTROMAGNETISMO

Il corso di Teoria dei Circuiti si avvale della pregressa conoscenza, da parte degli studenti, delle leggi basilari dell'Elettromagnetismo. Per comodità di esposizione si inizierà con il richiamare tali leggi per poi passare ad illustrare l'approccio circuitale a parametri concentrati che costituisce il fondamento di un'importante branca dell'Elettrotecnica e dell'Elettronica.

Richiamiamo le quattro Equazioni di Maxwell (E.M.) del campo Elettromagnetico in forma differenziale:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{E.M.}) \\ \nabla \cdot \vec{D} &= \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0\end{aligned}$$

dove i simboli rappresentano:

$\vec{E} = \vec{E}_s + \vec{E}_i$	campo elettrico [V/m] somma di un campo elettrostatico conservativo \vec{E}_s , ed uno indotto \vec{E}_i . Per cui $\nabla \times \vec{E} = \nabla \times \vec{E}_s + \nabla \times \vec{E}_i = 0 + \nabla \times \vec{E}_i$
\vec{B}	induzione magnetica [T]
\vec{H}	campo magnetico [A/m]
\vec{J}	densità di corrente di conduzione [A/m ²]
\vec{D}	spostamento elettrico [C/m ²]
ρ	densità volumetrica di carica elettrica [C/m ³]

Oltre alle Equazioni di Maxwell si devono considerare le Leggi Costitutive (L.C.) del Mezzo Materiale:

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \epsilon \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu \vec{H} \\ \vec{J} &= \sigma (\vec{E} + \vec{E}_m) + \vec{J}_m\end{aligned} \quad (\text{L.C.})$$

i simboli rappresentano:

ϵ	permettività elettrica [F/ m]
μ	la permeabilità magnetica [H/m]
σ	conducibilità elettrica [$\Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$].

\ddot{E}_m il campo elettromotore impresso
 \ddot{J}_m densità di corrente impressa,

Come noto dai corsi di fisica, combinando tra loro le equazioni di Maxwell e le leggi costitutive del mezzo, si ottengono delle equazioni che descrivono un fenomeno di propagazione di onde e/o un fenomeno di diffusione del campo elettromagnetico (ad esempio il fenomeno descritto dalle equazioni di Maxwell nel vuoto, ed in assenza di sorgenti impresse, consiste in un'onda che si propaga nello spazio).

Richiamano adesso le definizioni delle quantità scalari *differenza di potenziale (ddp)*, *forza elettromotrice*, *intensità corrente elettrica di conduzione* e *potenza elettrica*:

La *differenza di potenziale (ddp)* tra due punti A e B coincide con l'integrale di linea cambiato di segno del campo elettrico lungo una qualunque linea, λ_{AB} , congiungente A e B e orientata da A verso B:

$$v_A - v_B = \int_A^B \ddot{E} \cdot d\lambda_{AB}.$$

Qualora l'integrale di linea interessi un campo elettrico non conservativo (elettromotore od indotto), in luogo di differenza di potenziale parleremo di *forza elettromotrice (fem)*.

Nel caso si calcoli una *ddp*, il particolare percorso d'integrazione λ è indifferente ai fini del risultato finale. Nel caso, invece, in cui si calcoli una *fem*, il risultato dell'integrale di linea varia al variare del particolare percorso che si segue per andare da A a B.

Nel seguito useremo indicare con il termine *tensione* tra due punti A e B un qualunque integrale di linea di campo conservativo o non-conservativo.

L'*intensità di corrente elettrica di conduzione* (nel seguito brevemente detta *corrente*) è definita come la quantità di carica dq che fluisce in una sezione di area S nel tempo dt :

$$i = \frac{dq}{dt}.$$

Come noto, la corrente è esprimibile anche attraverso il flusso del vettore densità di corrente attraverso la generica sezione S :

$$i = \int_S \ddot{J} \cdot \hat{n} dS,$$

dove con \hat{n} si sono indicate le giaciture delle areole infinitesime dS di S .

Si definisce infine *Potenza Elettrica*, che interessa un Volume V , l'integrale:

$$P = \int_V \ddot{E} \cdot \ddot{J} dV.$$

REGIME STAZIONARIO E PRINCIPI DI KIRCHHOFF

Definiamo *stazionario* un regime in cui non si osserva alcuna variazione (in ampiezza, direzione e verso) delle grandezze fisiche in gioco al variare del tempo. Tale definizione comporta la scrittura delle equazioni di Maxwell senza la comparsa di tutti quei termini che in

esse appaiono come derivate parziali temporali: $\frac{\partial \ddot{B}}{\partial t} = 0$ e $\frac{\partial \ddot{D}}{\partial t} = 0$.

L'esistenza del regime stazionario comporta dunque che il campo elettrico è irrotazionale e la densità di corrente è solenoidale:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad \text{e} \quad \nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (1)$$

Mentre la prima equazione delle (1) è immediata, la seconda si deduce dalle (E.M.) ricordando la proprietà matematica che vuole che il risultato dell'operazione di divergenza applicata a quella di rotore dia sempre risultato nullo. Essendo allora, per la stazionarietà, $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$, basta applicare l'operazione di divergenza membro a membro per ottenere $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot \vec{J} = 0$, cioè la seconda delle (1). Le relazioni (1) ci indicano, in altre parole, che il campo elettrico e quello magnetico, a regime stazionario, non sono in grado di originare un fenomeno di propagazione.

In forma integrale le (1) permettono di scrivere:

$$\oint_{\forall \text{Linea chiusa } \lambda} \vec{E} \cdot d\vec{\lambda} = 0 \quad (2)$$

e

$$\int_{\forall \text{Superficie chiusa } S} \vec{J} \cdot \vec{n} \, dS = 0 \quad (3)$$

L'espressione (2) indica che la *circuitazione del campo elettrico* eseguita lungo una qualunque linea chiusa λ è sempre nulla, mentre la (3) indica che il *flusso del vettore densità di corrente attraverso una qualunque superficie chiusa* S (cioè una superficie che circonda completamente un volume) è sempre nullo.

Sappiamo anche che la *differenza di potenziale (ddp)*, v , tra due punti A e B coincide con l'integrale di linea cambiato di segno del campo elettrico lungo una qualunque linea, λ , congiungente A e B:

$$v = - \int_{\lambda} \vec{E} \cdot d\vec{\lambda} \quad (4)$$

mentre l'*intensità di corrente*, i , che fluisce attraverso una sezione S_a si ottiene per mezzo del flusso del vettore \vec{J} :

$$i = \int_{S_a} \vec{J} \cdot \vec{n} \, dS \quad (5)$$

PRIMO PRINCIPIO DI KIRCHHOFF PER LE CORRENTI (I PdK)

In virtù delle relazioni (3) e (5) si può pensare di ottenere il flusso del vettore densità di corrente attraverso una superficie chiusa, S_c , decomponendo tale superficie in un numero arbitrario, p , di sottosuperfici S_k in modo che sia: $S_c = \bigcup_{k=1}^p S_k$

$$\int_{S_c = \bigcup_{k=1}^p S_k} \vec{J} \cdot \hat{n} \, dS_c = \sum_{k=1}^p \int_{S_k} \vec{J} \cdot \hat{n} \, dS_k = \sum_{k=1}^p i_k = 0 \quad (7)$$

dove con i_k si è indicata l'intensità di corrente entrante in ogni k -ma sottosuperficie S_k .

Dalla (7) si trae allora che è nulla la sommatoria di tutte le correnti che interessano una generica superficie chiusa:

$$\sum_{k=1}^p i_k = 0 \quad (\text{I PdK})$$

Si fa notare che, nello scrivere la relazione del I PdK, il verso di ciascuna giacitura, relativa ad ogni areaola dS_k , della k -ma superficie S_k , è stato assunto sempre entrante (oppure sempre uscente) rispetto al volume racchiuso dall'intera superficie S_c . Se, per esempio, avessimo deciso di assumere per la sola generica j -ma sezione S_j versi di giacitura uscenti (o entranti) relativamente ad ogni areaola dS_j , tali versi sarebbero stati non concordi con tutti quelli con cui si sono calcolate tutte le altre $p-1$ correnti. In tale caso avremmo scritto: $\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{p-1} i_k - i_j = 0$. Tale nota

di avvertenza si rende necessaria perché giustifica il fatto che in molti testi lo studente può trovare che il I PdK per le correnti è scritto come: $\sum_{k=1}^p \pm i_k = 0$. In questo caso, il principio deve essere enunciato come “è nulla la somma algebrica delle correnti entranti e uscenti in ogni superficie chiusa che avvolga una porzione di circuito”. Risulta allora che ogni termine per cui la corrente ha verso entrante (o uscente) sarà preceduto dal segno “+”, mentre il simbolo “-” precederà il termine di corrente che ha verso uscente (o entrante).

SECONDO PRINCIPIO DI KIRCHHOFF PER LE TENSIONI (II PdK)

In virtù delle relazioni (2) e (4) si può pensare, anche in questo caso, di calcolare la circuitazione (2) sfruttando la proprietà che vuole che l'integrale di una somma sia uguale alla somma dei singoli integrali. Allora, se il percorso chiuso λ è decomponibile in un numero arbitrario, m , di sottopercorsi λ_k in modo che sia: $\lambda = \bigcup_{k=1}^m \lambda_k$, si ha:

$$\oint_{\lambda = \bigcup_{k=1}^m \lambda_k} \vec{E} \cdot d\vec{\lambda} = \sum_{k=1}^m \int_{\lambda_k} \vec{E} \cdot d\vec{\lambda}_k = \sum_{k=1}^m (-v_k) = 0 \quad (6)$$

dove con v_k si è indicata la tensione di ogni k -mo tratto di sottopercorso λ_k . Dalla (6) si trae quindi che è nulla la sommatoria di tutte le tensioni eseguita lungo un percorso chiuso orientato (è indifferente se in senso orario oppure in senso antiorario):

$$\sum_{k=1}^m v_k = 0 \quad (\text{II PdK})$$

Si fa notare che nello scrivere la relazione (II PdK) il verso di ciascun k -mo tratto di sottopercorso λ_k è stato assunto concorde con il verso (orario o antiorario) del percorso chiuso totale λ . Se invece, per esempio, avessimo deciso di assumere per il generico j -mo percorso un verso λ_j discorde rispetto a quello di λ , avremmo scritto: $\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{m-1} v_k - v_j = 0$. Tale osservazione, seppur banale, si rende necessaria perché giustifica il fatto che in molti testi si trova che il principio alle tensioni è scritto come: $\sum_{k=1}^m \pm v_k = 0$. In questo caso, alla luce di quanto detto, ogni termine della sommatoria sarà preceduto dal segno “+” quando il relativo sottopercorso

d'integrazione è concorde con il percorso chiuso λ ; il simbolo “-“ precederà invece ogni termine che ha sottopercorso d'integrazione che si trova “contromano” rispetto a λ .

I Principi di Kirchhoff ora esposti, hanno bisogno, come visto, di un sistema di riferimento (verso positivo) sia per le correnti sia per le tensioni. D'ora in poi converremo di indicare con una freccia il verso di riferimento assunto per il calcolo di una ddp e con un'altra freccia quello assunto per il calcolo di una *intensità di corrente*. Deve esser chiaro che tali frecce hanno mero significato di “*sistema di riferimento*” (come visto, la tensione e la corrente sono quantità *scalari* la cui intensità è un numero reale che, rispetto al riferimento scelto, può assumere valore positivo o negativo).

Ovviamente i principi di Kirchhoff, definiti per il regime stazionario, non valgono più se $\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$. E' intuibile, però, che se la variazione nel tempo delle grandezze che definiscono il campo elettromagnetico è sufficientemente lenta, cioè la relativa derivata è relativamente piccola, in ogni istante t , si può assumere $\frac{\partial}{\partial t} \cong 0$ ed è quindi possibile riconsiderare valide, in via approssimata, le espressioni (2), (3) che conducono al I PdK e al II PdK. Quando il considerare $\frac{\partial}{\partial t} \cong 0$ è lecito, si parla di *regime quasi stazionario*.

Vediamo ora quali sono i limiti di validità di un regime quasi-stazionario, cioè quando è effettivamente lecito considerare $\frac{\partial}{\partial t} \cong 0$ e quali conseguenze comporta tale assunzione.

MODELLO CIRCUITALE A PARAMETRI CONCENTRATI

Immaginiamo, aiutandoci con un semplice esempio qualitativo, che una perturbazione di natura elettromagnetica (ad esempio un flusso di cariche) viaggi da un punto A verso un punto B in un materiale filiforme (segmento di lunghezza $|x_B - x_A| = d$). Si immagini che la perturbazione abbia, per ogni fissata ascissa x , andamento sinusoidale nel tempo, come di seguito riportato avendo assunto l'origine dell'asse delle ascisse in A ($x_A = 0$) e verso positivo

diretto verso B: $i(x, t) = I(x) \sin[\omega(t - \tau)] = I(x) \sin[\omega(t - \frac{x}{c})]$.

Si è scelto di indicare:

1) con $I(x)$ l'ampiezza della perturbazione che in generale potrebbe variare d'intensità lungo x ;
 2) con ω la pulsazione [rad/s] (che è legata alla frequenza f [Hz] e al periodo T [s] dalle

notissime relazioni $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$);

3) con τ il tempo di ritardo rispetto al punto A con cui, in una generica ascissa x , si osserva passare la perturbazione;

4) con c la velocità di propagazione pari a $c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \cong 300000$ [km/s] nel vuoto (e nei mezzi con permittività relativa e permeabilità relativa unitarie).

Poiché c è costante, è evidente che $c = \frac{x}{\tau} = \frac{d}{\Theta}$ dove con Θ si è indicato il tempo totale impiegato dalla perturbazione per giungere all'estremità $x_B = d$. Ora, se il regime fosse stazionario, si avrebbe sicuramente $\nabla \cdot \ddot{J} = 0$ e quindi sarebbe $i(x_A, t) = i(x, t) = i(x_B, t)$.

Se il regime non è stazionario sarà, invece, $i(x_A, t) \neq i(x, t) \neq i(x_B, t)$. Ciò è dovuto al fatto che la *densità di corrente di conduzione* non dà luogo ad un campo solenoidale. Se per semplicità consideriamo il caso di assenza di attenuazione durante la propagazione, cioè $I(x) = \text{cost}$ per ogni x , è evidente che la disuguaglianza della corrente nelle varie sezioni verrebbe comunque ad essere causata dall'angolo di ritardo $\omega\tau = \frac{\omega x}{c}$. Ovviamente se quest'ultimo termine fosse trascurabile, finanche quando assume il suo più alto valore $\omega\tau_{max}$, cioè alla distanza massima d , allora tornerebbe a valere la relazione $i(x_A, t) \approx i(x, t) \approx i(x_B, t)$.

Affinché l'angolo di ritardo $\omega\tau_{max}$ sia trascurabile si deve poter ammettere che $\omega\tau_{max} = \frac{\omega d}{c} = \frac{2\pi f}{c} d = 2\pi \frac{d}{\lambda} \rightarrow 0$. Ciò si può assumere "quasi-vero" quando il valore $\lambda = \frac{c}{f}$, cui si dà il nome di *lunghezza d'onda*, è tale che $\lambda \gg d$. La lunghezza d'onda compara una proprietà del mezzo materiale, attraverso la velocità di propagazione nel mezzo $c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$, con

una proprietà della perturbazione, attraverso la frequenza f (a $f = 50[\text{Hz}]$ è $\lambda = 6.000[\text{km}]$) propria del segnale trasmesso. Quindi dire che per un dispositivo, o per un sistema elettrico, il regime è tale per cui $\frac{\partial}{\partial t} \approx 0$, comporta che si è verificato che vale $\lambda \gg d$, dove d , in questo caso, deve intendersi la più grande dimensione del dispositivo in cui si può osservare una qualunque perturbazione elettromagnetica.

La conseguenza di assumere $\lambda \gg d$, introduce al *modello circuitale a parametri concentrati* che stiamo per descrivere. Le principali ipotesi, caratteristiche di tale modello, sono enunciabili attraverso tre espressioni equipollenti:

- 1) le dimensioni geometriche di un *circuito a parametri concentrati* si considerano nulle (mentre, ovviamente, un dispositivo possiede delle proprie dimensioni, il circuito che lo modella non ha dimensioni finite);
- 2) sono nulli i tempi di ritardo nella propagazione all'interno di un *circuito a parametri concentrati*;
- 3) la velocità di propagazione all'interno di un *circuito a parametri concentrati* è infinita (ovviamente tale asserzione è assurda da un punto di vista fisico ma giustifica il fatto che non si osserva propagazione).

Queste chiare conseguenze introdotte da $\lambda \gg d$, e che sono alla base del modello circuitale a parametri concentrati, sono evidenti "forzature" fisiche. Esse però trovano giustificazione nel fatto che, come si vedrà, i risultati ottenibili con le semplificazioni circuitali, rispetto a quelli ottenibili con la completa applicazione delle equazioni di Maxwell, sono più facili da raggiungere conservando comunque una competitiva aderenza con le risultanze sperimentali.

Nel seguito adottando la terza asserzione, assumeremo $c \rightarrow \infty$. Da ciò discende che il prodotto $\mu\epsilon \rightarrow 0$. Si potranno dunque identificare all'interno di un sistema elettromagnetico, delle precise *regioni concentrate* del mezzo materiale che giustificano il nome di *circuito a parametri concentrati* che si dà a tale approccio:

REGIONE N (*vuoto circuitale*): $\mu=0, \varepsilon=0$ (quasi-stazionarietà elettromagnetica) $\sigma = 0, \ddot{E}_m = 0$ e $\ddot{J}_m = 0$.

Qui le leggi costitutive del mezzo diventano:

$$\ddot{D} = \varepsilon \ddot{E} = 0$$

$$\ddot{B} = \mu \ddot{H} = 0$$

$$\ddot{J} = \sigma (\ddot{E} + \ddot{E}_m) + \ddot{J}_m = 0$$

e le equazioni di Maxwell di conseguenza offrono:

$$\nabla \times \ddot{E} = 0 \text{ e } \nabla \cdot \ddot{J} = 0.$$

L'irrotazionalità del campo elettrico assicura che si può definire la *ddp* tra due punti in modo univoco.

Alcuni autori chiamano tale regione semplicemente *vuoto*. In questo caso bisogna fare attenzione all'ovvio fatto che con tale termine non ci si riferisce al *vuoto fisico* in cui $\mu = 4\pi 10^{-7}$ [H/m] e $\varepsilon = 8.86 \cdot 10^{-12}$ [F/m], ma ad un *vuoto circuitale*.

REGIONE EQP (*regione di equipotenzialità, conduttore perfetto o corto circuito ideale o, terminali o morsetti d'ingresso*):

$\mu=0, \varepsilon=0$ (quasi-stazionarietà elettromagnetica) $\sigma \rightarrow \infty, \ddot{E}_m = 0$ e $\ddot{J}_m = 0$.

La $\sigma \rightarrow \infty$ porta necessariamente a $\ddot{E} = 0$ in modo da avere comunque valori finiti di densità di corrente. Infatti qui le leggi costitutive del mezzo diventano:

$$\ddot{D} = \varepsilon \ddot{E} = 0$$

$$\ddot{B} = \mu \ddot{H} = 0$$

$$\ddot{J} = \sigma (\ddot{E} + \ddot{E}_m) + \ddot{J}_m = \infty \cdot 0 \rightarrow \text{forma indeterminata}$$

La forma indeterminata della corrente ci dice che attraverso le leggi costitutive non siamo in grado di stabilire il valore della densità di corrente che comunque resta finito.

Sotto queste ipotesi ci troviamo in presenza di una regione in cui *non può sorgere alcuna ddp* essendo $\ddot{E} = 0$. Inoltre le equazioni di Maxwell ci assicurano che $\nabla \cdot \ddot{J} = 0$, cioè che la densità di corrente costituisce un campo solenoidale.

REGIONE C (*Condensatore ideale*):

$\mu=0, \varepsilon \neq 0$ (quasi stazionarietà magnetica) $\sigma = 0, \ddot{E}_m = 0$ e $\ddot{J}_m = 0$.

Qui le leggi costitutive del mezzo diventano:

$$\ddot{D} = \varepsilon \ddot{E} \neq 0$$

$$\ddot{B} = \mu \ddot{H} = 0$$

$$\ddot{J} = \sigma (\ddot{E} + \ddot{E}_m) + \ddot{J}_m = 0$$

e le equazioni di Maxwell di conseguenza offrono:

$$\nabla \times \ddot{E} = 0 \text{ e } \nabla \times \ddot{H} = \frac{\partial \ddot{D}}{\partial t}.$$

Sotto queste ipotesi ci troviamo in presenza di materiale puramente dielettrico. Come vedremo, tale regione sarà identificata da un parametro concentrato: la *capacità C*.

REGIONE LM (*Induttore ideale, Mutui Induttori, Trasformatore ideale*):

$\mu \neq 0, \varepsilon = 0$ (quasi stazionarietà elettrica) $\sigma \rightarrow \infty, \ddot{E}_m = 0$ e $\ddot{J}_m = 0$.

La $\sigma \rightarrow \infty$ ha come conseguenza $\ddot{E} = 0$ in modo da avere sempre valori finiti di densità di corrente e, di conseguenza, valori finiti di campo magnetico. Ricordando che $\ddot{E} = \ddot{E}_s + \ddot{E}_i$ si ha che $\ddot{E} = \ddot{E}_s + \ddot{E}_i = 0 \rightarrow \ddot{E}_s = -\ddot{E}_i$. Quindi il rotore del campo elettrico è diverso da zero essendo $\nabla \times \ddot{E} = \nabla \times \ddot{E}_s + \nabla \times \ddot{E}_i = 0 + \nabla \times \ddot{E}_i$ e con $\mu \neq 0$ si avrà $\nabla \times \ddot{E} = \nabla \times \ddot{E}_i = -\frac{\partial \ddot{B}}{\partial t}$, mentre $\nabla \times \ddot{H} = \ddot{J}$.

Le leggi costitutive del mezzo diventano:

$$\ddot{D} = \varepsilon \ddot{E} = 0$$

$$\ddot{B} = \mu \ddot{H} \neq 0$$

$$\ddot{J} = \sigma (\ddot{E} + \ddot{E}_m) + \ddot{J}_m = \infty \cdot 0 \rightarrow \text{forma indeterminata}$$

Ricapitolando, per le ipotesi fatte, ci troviamo in presenza di un materiale puramente magnetico in cui le equazioni di Maxwell qui ci offrono: $\nabla \times \ddot{E} = -\frac{\partial \ddot{B}}{\partial t}$ e $\nabla \cdot \ddot{J} = 0$.

Come vedremo, tale regione sarà identificata, nel caso dell'induttore, da un parametro concentrato: l' *induttanza* L; nel caso di mutui induttori, occorrerà definire anche la *mutua induttanza* M.

REGIONE R (*Resistore ideale*):

$\mu=0, \varepsilon=0$ (quasi stazionarietà elettrica e magnetica) $\sigma \neq 0, \ddot{E}_m = 0$ e $\ddot{J}_m = 0$.

Qui le leggi costitutive del mezzo diventano:

$$\ddot{D} = \varepsilon \ddot{E} = 0$$

$$\ddot{B} = \mu \ddot{H} = 0$$

$$\ddot{J} = \sigma (\ddot{E} + \ddot{E}_m) + \ddot{J}_m = \sigma \ddot{E}$$

Sotto queste ipotesi ci troviamo in presenza di un materiale in cui il mezzo è resistivo puro. Le equazioni di Maxwell ci forniscono qui: $\nabla \times \ddot{E} = 0$ e $\nabla \cdot \ddot{J} = 0$.

Come vedremo, tale regione sarà identificata da un parametro concentrato: la *resistenza* R (o il suo reciproco, la *conduttanza* G).

REGIONE FEM (*Generatore ideale di fem*):

$\mu=0, \varepsilon=0$ (quasi stazionarietà elettrica e magnetica) $\sigma \rightarrow \infty, \ddot{E}_m \neq 0$ e $\ddot{J}_m = 0$.

La $\sigma \rightarrow \infty$ porta necessariamente ad avere $\ddot{E} + \ddot{E}_m = 0 \rightarrow \ddot{E} = -\ddot{E}_m$ per avere valori finiti di densità di corrente. Quindi, siccome il campo elettrico indotto è nullo, essendo $\mu=0$, dovrà essere $\ddot{E}_s = -\ddot{E}_m$.

Le leggi costitutive del mezzo diventano:

$$\ddot{D} = \varepsilon \ddot{E} = 0$$

$$\ddot{B} = \mu \ddot{H} = 0$$

$$\ddot{J} = \sigma (\ddot{E} + \ddot{E}_m) + \ddot{J}_m = \infty \cdot 0 \rightarrow \text{forma indeterminata}$$

Sotto queste ipotesi ci troviamo in presenza di un materiale in cui sorge una pura forza elettromotrice. Qui è $\nabla \times \ddot{E} \neq 0$ e $\nabla \cdot \ddot{J} = 0$.

Come vedremo, tale regione sarà identificata da un parametro concentrato: la *tensione erogata*.

REGIONE IG (*Generatore ideale di corrente*):

$\mu=0, \varepsilon=0$ (quasi stazionarietà elettrica e magnetica) $\sigma = 0, \ddot{E}_m = 0$ e $\ddot{J}_m \neq 0$.

Qui le leggi costitutive del mezzo diventano:

$$\ddot{D} = \epsilon \ddot{E} = 0$$

$$\ddot{B} = \mu \ddot{H} = 0$$

$$\ddot{J} = \sigma (\ddot{E} + \ddot{E}_m) + \ddot{J}_m = \ddot{J}_m$$

Notiamo inoltre che, essendo $\sigma = 0$ il valore del campo \ddot{E} risulta indeterminato.

Sotto queste ipotesi ci troviamo in presenza di materiale in cui il mezzo fa sorgere una corrente di conduzione.

Le equazioni di Maxwell porgono qui: $\nabla \times \ddot{E} = 0$ e $\nabla \cdot \ddot{J} = 0$.

Come vedremo, tale regione sarà identificata da un parametro concentrato: la *corrente erogata*.

Ogni regione *concentrata*, precedentemente definita, è accessibile da un'altra regione, attraverso dei *contatti* anche detti *terminali o morsetti d'ingresso*. Questi morsetti sono sempre rappresentati dalla regione EQP.

Un insieme di regioni tra loro connesse attraverso i suddetti tratti di EQP costituisce un *aggregato* circuitale.

Come vedremo meglio nel seguito, il modello circuitale non studia che cosa avviene all'interno di una regione, ma si prefigge l'obiettivo di studiare in che modo una regione interagisce con le altre, ad essa interconnesse. Vedremo infatti come dalle leggi costitutive del mezzo, che sono espresse da leggi locali vettoriali, si passerà ad altre leggi costitutive di tipo integrale, che legheranno tra loro gli scalari tensione e corrente (Regioni C, LM, R), o che, secondo relazioni predefinite, imporranno il valore della tensione (Regione FEM) o della corrente (Regione IG). Che cosa avviene all'interno di una regione è invece portato in conto dal valore del parametro concentrato associato ad ogni regione (tale parametro è calcolato in ipotesi stazionarie applicando le leggi del campo elettromagnetico: si ricordi come nei corsi di fisica si erano determinate, ad esempio, le espressioni per il calcolo della resistenza di un conduttore filiforme, della capacità di un condensatore piano o cilindrico, l'induttanza di un solenoide e così via).

Un circuito è dunque formato dall'interconnessione di più *regioni concentrate o aggregati* in modo da formare uno o più *percorsi chiusi*. Nel suo insieme, un circuito è sempre immerso nella Regione N di *vuoto circuitale*, ciò significa che tutto il fenomeno elettromagnetico di un dispositivo rappresentabile a parametri concentrati è descritto interamente dal circuito. Oltre il circuito non c'è nulla. Ciò vuol dire che se si volessero portare in conto altri fenomeni esterni precedentemente non presi in considerazione, saremmo sempre obbligati a cambiare l'assetto del circuito in modo che quelli che erano fenomeni esterni, siano compresi all'interno del nuovo circuito. Quindi non esiste, in generale, un modello circuitale in grado di descrivere un dispositivo al variare di tutte le possibili condizioni di funzionamento. Un certo modello circuitale descriverà solo il comportamento di un dispositivo entro certi "campi di funzionamento". Così un circuito ad alte frequenze di un transistor, come si vedrà nei corsi di elettronica, sarà diverso dal circuito che lo descrive a basse frequenze, e così via.

La verifica della validità dei Principi di Kirchhoff per un circuito a parametri concentrati, in regime quasi stazionario, è immediata:

- il I PDK è verificabile constatando che nel circuito una regione è sempre collegata con un'altra attraverso una regione EQP. Per la rimanente parte ogni regione è immersa nella regione N. Ovviamente nelle regioni EQP ed N non si può avere accumulo di carica essendo per entrambe $\nabla \cdot \ddot{J} = 0$. Allora, se si calcola il flusso della densità di corrente relativamente ad una superficie chiusa che intersechi solo zone EQP e zone N del circuito, si otterrà sempre il risultato dell'integrale (3), cioè il I PDK per le superfici

chiuso. Si badi bene che la scelta della superficie deve essere tale che mai una regione sia sezionata al suo interno (cosa ovvia per quanto fin qui detto).

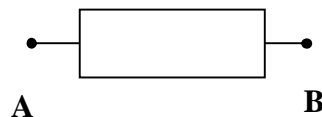
- il II PdK è altresì verificabile osservando che ogni possibile percorso chiuso interno al circuito è costituito dall'interconnessione di più regioni attraverso zone EQP. Il tutto è immerso nella regione N. Sia in EQP che in N è come già visto $\nabla \times \vec{E} = 0$. E' allora evidente che se la misura della tensione (*tensione a vuoto*) tra due diversi punti di accesso EQP di una regione, è eseguita calcolando il relativo integrale di linea lungo un generico percorso che si chiude nella *regione N*, in cui è immerso il circuito, è immediato ottenere la (2), quando si vanno a sommare tra loro le singole misure. Infatti, poiché nella regione N, come detto, è $\nabla \times \vec{E} = 0$, è evidente che si opererà la circuitazione (3) ogni volta che ci si riferisce ad un percorso chiuso, andando a sommare tra loro tutte le tensioni misurate ai capi di ogni singola regione incontrata durante il percorso d'integrazione.

Concludendo queste brevi note, osserviamo che l'ipotesi di *quasi-stazionarietà* conduce alle stesse conclusioni, in termini di Principi di Kirkhhoff, della *stazionarietà*. Ovviamente ciò è vero confinando le proprietà del mezzo in opportune regioni, all'interno delle quali il campo elettrico è sempre disaccoppiato dal campo magnetico. Possono altresì esistere, senza coesistere, la corrente di spostamento (condensatore ideale) o la *fem indotta* (induttore ideale). Un dispositivo reale dovrà essere dunque sempre modellato attraverso l'uso di più regioni.

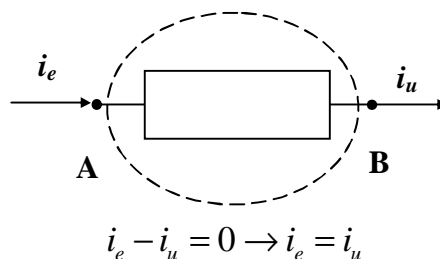
COMPONENTI CIRCUITALI: BIPOLI, MULTIPOLI E MULTIPORTA

Applichiamo il concetto di regione per introdurre il concetto di bipolo, di multipolo, di porta e di multiporta.

Si definisce **Bipolo** una regione circuitale accessibile da 2 regioni EQP dette morsetti (morsetto A e morsetto B) o terminali come in figura:



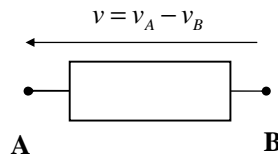
In virtù del primo principio di Kirkhhoff applicato ad una superficie chiusa che interseca il bipolo tagliandolo in corrispondenza delle regioni EQP dei suoi morsetti (assumendo la giacitura della superficie rivolta verso l'interno del bipolo) si ha, con riferimento alla figura:



Come già detto, parlando dei principi di Kirkhhoff, l'espressione precedente ci dice che la corrente entrante nel bipolo è uguale alla corrente da questo uscente. D'ora in poi si indicherà sul bipolo solamente una delle due correnti. Tale corrente sarà indicata, come appare nella figura precedente, tracciando una freccia sopra uno dei due morsetti.

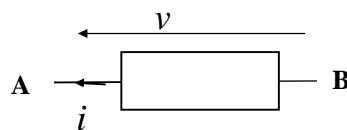
Similmente si procede per indicare la ddp , v , tra i morsetti A e B del bipolo. Si fa ricorso, cioè ad un'altra freccia (si noti che alcuni autori al posto della freccia mettono il simbolo "+") laddove noi metteremo la "punta" della freccia) che indicherà se la ddp è stata calcolata come

$v_A - v_B$ o viceversa $v_B - v_A$. L'uso del riferimento per il calcolo della *ddp* è chiarito nella figura seguente:

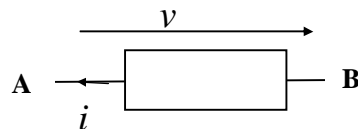


Definiamo ora due importanti **Convenzioni** relative ai versi assunti per il calcolo sul bipolo della corrente e della tensione.

Si definisce **Convenzione dei Generatori** la scelta di porre i versi di riferimento della tensione e della corrente *concordi* sul bipolo:



Si definisce **Convenzione degli Utilizzatori** la scelta di porre i versi di riferimento della tensione e della corrente *discordi* sul bipolo:



Per quanto riguarda il calcolo della potenza elettrica, in virtù delle ipotesi fin qui fatte, possiamo dire che per un bipolo, la potenza è pari al prodotto della tensione misurata ai suoi morsetti per la corrente che lo attraversa:

$$P = \int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV = (v_B - v_A)i$$

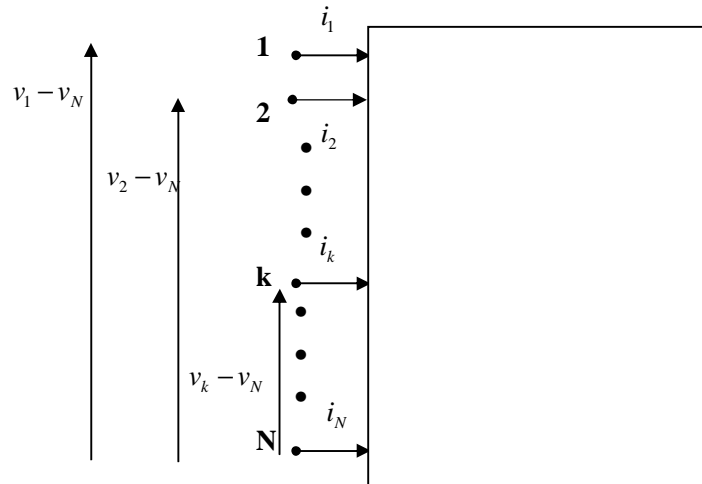
Sotto la *convenzione dei generatori*, la potenza sul bipolo deve essere interpretata come una *potenza erogata* (cioè uscente dal bipolo); viceversa, per la *convenzione degli utilizzatori* la potenza deve essere interpretata come *potenza assorbita* dal bipolo (potenza entrante nel bipolo). Ovviamente, solo dopo aver effettuato il calcolo numerico (secondo le modalità che stiamo per definire) si potrà conoscere l'effettivo segno che avrà la potenza.

Se, adottata una delle due convenzioni, il segno della potenza è positivo, ciò significa che la potenza sul bipolo è di natura coincidente (generata o utilizzata) con il nome della convenzione adottata (generatori o utilizzatori); viceversa, se il segno della potenza risultasse negativo, ciò significa che il bipolo è interessato da una potenza di natura opposta al nome della convenzione scelta.

Ad esempio, se si fosse adottata la convenzione dei generatori su un bipolo e, dopo aver effettuato il calcolo, la potenza risultasse negativa, diremo che il bipolo sta in realtà "funzionando" da utilizzatore. E' chiaro che se si cambiasse il tipo di convenzione, passando a quella degli utilizzatori, e si ripetesse il calcolo della potenza, questa diverrebbe ora positiva, infatti il bipolo sta realmente "funzionando" come utilizzatore.

Concludendo, il segno della Potenza non dà alcuna informazione sul comportamento energetico del bipolo se non si conosce quale tipo di convenzione è stato assunto per il calcolo.

Si definisce **Multipolo** una Regione Circuitale accessibile da N morsetti come in figura:



Per il I PdK deve essere nulla la somma delle correnti assunte sempre con verso entrante nel multipolo:

$$i_1 + i_2 + \dots + i_k + \dots + i_N = 0.$$

Qualora i morsetti fossero in numero pari, e tali per cui si verifica che le correnti sono tutte nulle a coppie, ad esempio: $i_1 = -i_3$, $i_2 = -i_4$ e così via, allora il multipolo si chiama **multiporta**. Per *porta* si intenderà ogni coppia di morsetti per cui la corrente che entra in un morsetto è uguale e opposta a quella che entra nell'altro. Particolare interesse hanno i *2-porte* (quattro morsetti), anche detti *doppi-bipoli*. Si fa notare che è usuale per un *tripolo* (tre morsetti) usare il termine *2-porte sbilanciato*, mentre è spesso usato per un doppio-bipolo il termine *2-porte bilanciato*. Infine segnaliamo la possibilità di chiamare un bipolo con il termine *1-porta*. In genere per *componente circuitale* si può intendere un qualunque bipolo, multipolo, porta o multiporta.

A seconda della loro natura i componenti circuitali si dividono in

- 1) Attivi o Passivi
- 2) Lineari o Non-Lineari
- 3) Tempo Varianti o Tempo Invarianti
- 4) Con Memoria o Senza Memoria
- 5) Reciproci o Non Reciproci

Per il momento ci limiteremo alle prime tre definizioni, riservandoci di completare le definizioni 4) e 5) successivamente. In particolare la definizione 5) sarà affrontata nella parte di programma che parla in dettaglio dei 2-porte.

Passività

Assumendo la convenzione degli utilizzatori su un bipolo, detta $v(t)$ la tensione tra i suoi morsetti e $i(t)$ la corrente che lo interessa, si dirà che il bipolo è *passivo* se l'energia ad esso associata vale:

$$E = \int_{-\infty}^t v(t)i(t)dt \geq 0$$

Il motivo di tale definizione è chiaro considerando che la potenza istantanea assorbita dal bipolo (si ricordi che abbiamo assunto la Convenzione degli Utilizzatori) vale $P(t) = v(t)i(t)$, mentre l'energia globalmente assorbita dal bipolo fino al tempo t (estremo superiore d'integrazione) da tempo "remoto" (estremo inferiore d'integrazione $-\infty$) ci segnala se mediamente il comportamento del bipolo è stato quello di un utilizzatore. Al tempo "remoto", per ipotesi, il bipolo si assume sempre ad energia nulla. La passività è dunque una proprietà che il bipolo ha globalmente, e non esclude che in certi istanti o intervalli finiti di tempo, il bipolo passivo non possa comportarsi come attivo. Ovviamente per i multiporta, la condizione di

passività deve essere verificata sommando l'energia entrante su ogni porta. Ad esempio per un N -porte deve aversi:

$$E = \sum_{k=1}^N E_k = \sum_{k=1}^N \int_{-\infty}^t v_k(t) i_k(t) dt \geq 0$$

dove $v_k(t)$ e $i_k(t)$ sono la tensione e la corrente relative ai morsetti di porta al morsetto di porta e tali da assumere la Convenzione degli Utilizzatori sulla porta.

Linearità

Un componente circuitale è *lineare* se ad una causa che lo sollecita corrisponde un effetto che è ad essa proporzionale. (Tale definizione sarà più chiara nel seguito dopo aver introdotto le leggi costitutive dei vari componenti)

Tempo Invarianza

Un componente circuitale è *tempo invariante* se ad una causa che lo sollecita corrisponde un effetto che non dipende dal particolare istante di applicazione della causa. (Tale definizione sarà più chiara nel seguito dopo aver introdotto le leggi costitutive dei vari componenti).

Focalizzeremo ora l'attenzione verso i bipoli (componenti 1-porta), che sono i più semplici componenti dei circuiti, passeremo in seguito a trattare dei 2-porte bilanciati e sbilanciati. Inoltre, per gli scopi del corso, focalizzeremo la trattazione sui bipoli lineari e tempo-invarianti.

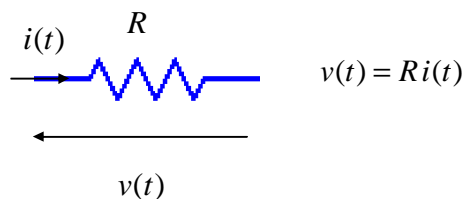
BIPOLI LINEARI, TEMPO-INVARIANTI

BIPOLI PASSIVI

Sono bipoli passivi, come stiamo per verificare, il Resistore, l'Induttore ed il Condensatore

Legge costitutiva del resistore

Un resistore è un elemento (Regione R) che in *convenzione degli utilizzatori* (vedi figura in cui è rappresentato il relativo simbolo) è caratterizzato dalla legge costitutiva:



Nota come legge di *Ohm*. Il parametro R prende il nome di *resistenza* e ha per unità di misura Ω (*Ohm*).

Se il parametro R non è una funzione del tempo, allora il resistore si dice *tempo-invariante*, se poi R è un valore che si mantiene costante al variare della corrente (o della tensione) che lo interessano il resistore sarà *lineare*.

Il resistore, a prescindere dalla linearità e/o dalla *tempo-invarianza*, è un elemento passivo. Infatti applicando la definizione di passività si ha:

$$E = \int_{-\infty}^t v(t) i(t) dt = \int_{-\infty}^t [Ri(t)] i(t) dt = R \int_{-\infty}^t i(t)^2 dt \geq 0 \text{ sempre.}$$

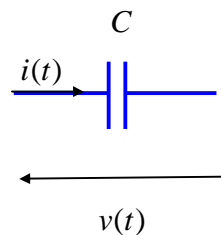
Il resistore è un bipolo *senza memoria* in quanto non è in grado di immagazzinare energia.

Si noti che in *convenzione dei generatori* (invertendo la tensione oppure la corrente sul resistore) la legge costitutiva diviene: $v(t) = -Ri(t)$.

Infine, di grande importanza per ciò che diremo in futuro, è il parametro **conduttanza**. La conduttanza si indica con il simbolo **G** ed è pari all'inverso della resistenza: $G = \frac{1}{R}$. Il simbolo grafico è lo stesso, perché un resistore può essere definito sia in termini di resistenza che di conduttanza.

Legge costitutiva del condensatore

Un condensatore è un elemento (Regione C) che in **convenzione degli utilizzatori** (vedi figura in cui è rappresentato il relativo simbolo) è caratterizzato dalla legge costitutiva:



The diagram shows a capacitor symbol consisting of two parallel vertical lines. An arrow labeled $i(t)$ points to the right above the symbol. Below the symbol, an arrow labeled $v(t)$ points to the left.

$$i(t) = \frac{d}{dt} C v(t) = C \frac{d}{dt} v(t) + v(t) \frac{dC}{dt}$$

Il parametro **C** prende il nome di **capacità** e ha per unità di misura F (*Farad*).
Richiamo di fisica: Il parametro **C** è definito come:

$$C = \frac{Q}{v}$$

dove **Q** è la quantità di carica accumulata su un'armatura del condensatore.

Ovviamente la legge costitutiva si ricava immediatamente dalla definizione di corrente $i = \frac{dQ}{dt}$. Se il parametro **C** non è una funzione del tempo, allora il condensatore si dice *tempo-invariante* e la legge costitutiva diviene:

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

se poi **C** è un valore che si mantiene costante al variare della corrente (o della tensione) che lo interessano il condensatore sarà *lineare*.

Il condensatore, a prescindere dalla linearità e/o dalla tempo-invarianza, è un elemento passivo. Infatti applicando la definizione di passività si ha:

$$E = \int_{-\infty}^t v(t) i(t) dt = \int_{-\infty}^t v(t) \left[C \frac{dv(t)}{dt} \right] dt = C \int_0^{v(t)} v(t) dv(t) = \frac{1}{2} C v(t)^2 \geq 0 \text{ sempre.}$$

Il condensatore è un bipolo **con memoria**. Infatti, se riscriviamo la legge costitutiva in forma integrale:

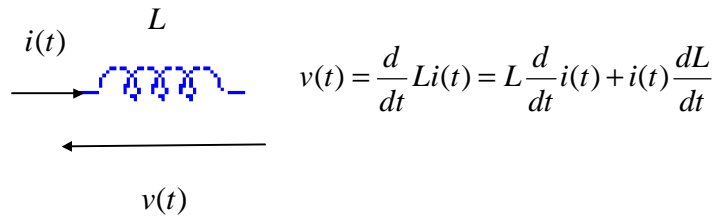
$$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + v(0)$$

appare chiaro che il termine $v(0)$, che è la tensione accumulata su **C** fino all'istante $t = 0$, costituisce una memoria per il condensatore che è dunque in grado di accumulare energia.

Si noti che in **convenzione dei generatori** (invertendo la tensione oppure la corrente sul resistore) la legge costitutiva diviene: $i(t) = -C \frac{d}{dt} v(t)$.

Legge costitutiva dell' induttore

Un induttore è un elemento (Regione LM) che in **convenzione degli utilizzatori** (vedi figura in cui è rappresentato il relativo simbolo) è caratterizzato dalla legge costitutiva:



Il parametro L prende il nome di **induttanza** e ha per unità di misura H (*Henry*). Se il parametro L non è una funzione del tempo, allora l'induttore si dice *tempo-invariante* e la legge costitutiva diviene:

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

se poi L è un valore che si mantiene costante al variare della corrente (o della tensione) che lo interessano l'induttore sarà *lineare*.

Richiamo di fisica: il parametro L è legato al rapporto tra il flusso dell'induzione magnetica che si concatena con N spire che circondano una superficie di area S , $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS$, con la corrente che percorre le spire:

$$L = \frac{N\Phi}{i}$$

Ovviamente la legge costitutiva si ricava immediatamente in base al noto calcolo della *fem* indotta $e(t)$ secondo la legge di Faraday-Neumann-Lenz sull'induzione (forma integrale della I

equazione di Maxwell):
$$e(t) = \oint_{\lambda} \vec{E} \cdot d\vec{\lambda} = \int_{S(\text{contornata da } \lambda)} \nabla \times \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \int_{S(\text{contornata da } \lambda)} -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS = -N \frac{d\Phi}{dt}$$

notando che in convenzione degli utilizzatori deve essere $v(t) = -e(t)$.

L'induttore, a prescindere dalla linearità e/o dalla *tempo-invarianza*, è un elemento passivo. Infatti applicando la definizione di passività si ha:

$$E = \int_{-\infty}^t v(t)i(t)dt = \int_{-\infty}^t [L \frac{di(t)}{dt}]i(t)dt = L \int_0^{v(t)} i(t)di(t) = \frac{1}{2} Li(t)^2 \geq 0 \text{ sempre.}$$

L'induttore è un bipolo **con memoria**. Infatti, se riscriviamo la legge costitutiva in forma integrale:

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v(t)dt + i(0)$$

appare chiaro che il termine $i(0)$, che è la corrente che scorre in L all'istante $t = 0$, costituisce una memoria per l'induttore.

Si noti che in **convenzione dei generatori** (invertendo la tensione oppure la corrente sul resistore) la legge costitutiva diviene: $v(t) = -L \frac{d}{dt} i(t)$.

Dualità

Scrivendo le leggi costitutive dell'induttore e del condensatore ci siamo imbattuti in un espressione del tipo:

$$y(t) = A \frac{dx(t)}{dt}$$

per il condensatore è $y(t) = i(t)$ $A = C$ $x(t) = v(t)$; mentre per l'induttore è $y(t) = v(t)$ $A = L$ $x(t) = i(t)$. Scambiando dunque corrente e tensione, induttanza e capacità,

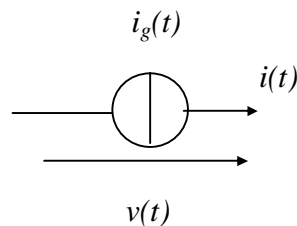
otteniamo la stessa legge costitutiva. Dunque l'induttore e il condensatore sono componenti *duali*. Sul concetto di dualità torneremo più volte nel seguito.

BIPOLI ATTIVI

Sono bipoli attivi il *generatore indipendente ideale di corrente* (Regione IG) ed *generatore indipendente ideale di tensione* (Regione FEM)

Generatore Ideale di Corrente

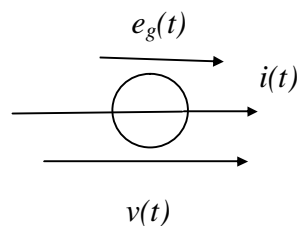
Il simbolo del generatore ideale di corrente è:



Per tale bipolo è impressa e nota a priori la funzione $i_g(t)$ che definisce la corrente $i(t)$ che scorre nel bipolo. La tensione sul bipolo è indeterminata: $-\infty < v(t) < +\infty$. Il generatore ideale è anche detto, quindi, generatore di potenza infinita (come potenzialità, ovviamente).

Generatore Ideale di Tensione

Il simbolo del generatore ideale di tensione corrente è:



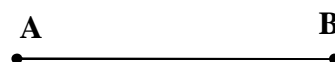
Per tale bipolo è impressa, e nota a priori, la funzione $e_g(t)$ che definisce la tensione $v(t)$ che agisce ai morsetti del bipolo. La corrente sul bipolo è indeterminata: $-\infty < i(t) < +\infty$. Il generatore ideale è anche detto, quindi, generatore di potenza infinita (come potenzialità, ovviamente).

E' chiara anche qui la dualità tra i due generatori ideali.

CORTO CIRCUITO IDEALE

Il corto circuito ideale, come per i morsetti d'ingresso, è costituito da una regione EQP. Si rappresenta mediante un simbolo grafico che è un semplice segmento.

La sua legge costitutiva è $v(t) = 0$



Se si incontra una tale rappresentazione in un circuito si deve intendere che è nulla la tensione tra A e B. Ovviamente nulla si può dire sul valore della corrente che attraversa il corto circuito.

Dalle leggi costitutive dei bipoli, passivi e attivi, precedentemente definiti, il cortocircuito coincide sia con un resistore in cui $R = 0 \text{ } [\Omega]$, sia con un generatore ideale di tensione che ha fem pari a $e_g(t) = 0 \text{ } [V]$.

CIRCUITO APERTO (“A VUOTO”)

Il circuito aperto (“vuoto” circuitale!) è il caso duale del corto circuito ideale. Infatti un componente si trova “a vuoto” quando in esso non scorre corrente: $i(t) = 0$.



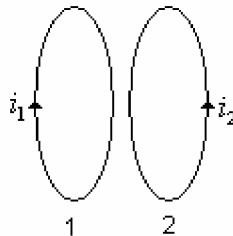
Ovviamente non c’è un preciso simbolo grafico per il “vuoto” che lo rappresenti, ma di volta in volta, sarà chiarito l’uso che se ne sta facendo.

Dalle leggi costitutive dei bipoli, passivi e attivi, precedentemente definiti, il vuoto coincide sia con un resistore in cui il resistore ha resistenza $R \rightarrow \infty$, sia con un generatore ideale di corrente che ha valore pari a $i_g(t) = 0 \text{ } [A]$.

ESEMPI DI 2-PORTE

MUTUA INDUTTANZA

Per semplicità di analisi consideriamo due semplici spire poste a distanza ravvicinata:



Nell’ipotesi di *linearità*, il flusso magnetico totale complessivamente concatenato con la spira 1 è pari alla *somma algebrica* di due contributi:

$$\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{12}$$

dove ϕ_1 è il flusso totale sulla spira 1, $\phi_{11} = L_1 \cdot i_1$ è quello generato dalla corrente i_1 e $\phi_{12} = M_{12} \cdot i_2$ dalla corrente i_2 . M_{12} prende il nome di **coefficiente di mutua induttanza** ed esprime quantitativamente l’accoppiamento elettromagnetico (mutua induttanza) della spira 2 sulla 1. Analogamente, sempre per la *linearità*, il flusso magnetico totale complessivamente concatenato con la spira 2 è pari alla *somma algebrica* di due contributi:

$$\phi_2 = \phi_{22} + \phi_{21}$$

dove ϕ_2 è il flusso totale sulla spira 2, $\phi_{22} = L_2 \cdot i_2$ è quello generato dalla corrente i_2 e $\phi_{21} = M_{21} \cdot i_1$ dalla corrente i_1 . M_{21} prende il nome di **coefficiente di mutua induttanza** ed esprime quantitativamente l'accoppiamento elettromagnetico (mutua induttanza) della spira 1 sulla 2.

Applicando la legge di Faraday a ϕ_1 otteniamo:

$$\frac{d\phi_1}{dt} = \frac{d}{dt} [\phi_{11} + \phi_{12}]$$

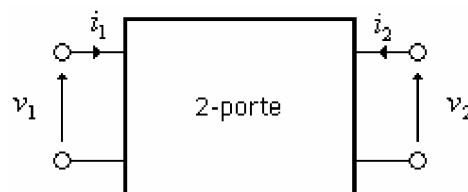
$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12} \frac{di_2}{dt}$$

Le stesse conclusioni valgono naturalmente anche per la spira 2:

$$\frac{d\phi_2}{dt} = \frac{d}{dt} [\phi_{22} + \phi_{21}]$$

$$v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M_{21} \frac{di_1}{dt}$$

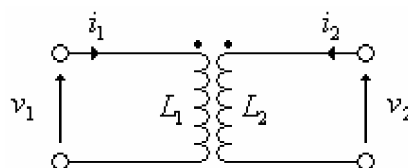
Le variabili tensione e corrente che compaiono nelle equazioni sono v_1 , i_1 e v_2 , i_2 . Questo significa che il sistema elettrico in esame, costituito dalle due spire, può essere schematizzato attraverso un doppio bipolo (2-porte) la cui legge costitutiva è descritta dalle due equazioni differenziali lineari che legano le tensioni con le correnti:



Nei corsi di fisica è stato dimostrato che i due coefficienti di mutua induttanza sono di uguale valore $M_{12} = M_{21} = M$. M può assumere segno positivo o negativo, a seconda che i due contributi al flusso totale si sommano o si sottraggono, dipendendo ciò dal verso delle correnti nelle spire (e in generale dal modo come le spire sono avvolte). Possiamo dunque scrivere:

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm |M| \frac{di_2}{dt}$$

$$v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm |M| \frac{di_1}{dt}$$

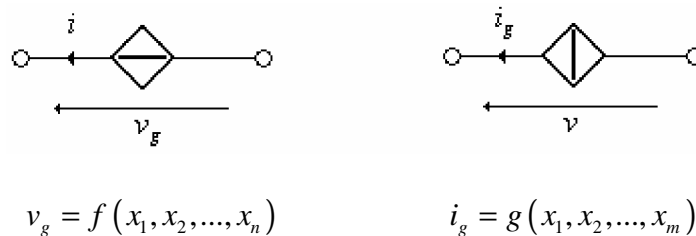


La presenza di \pm davanti al modulo del coefficiente di mutua induttanza è determinato convenzionalmente dal verso delle correnti rispetto alla sequenza di percorrenza del simbolo “punto” e del simbolo “bobina”. Se le correnti compiono ognuna, nel proprio tragitto, la stessa sequenza (puntino bobina o viceversa) si userà il segno “+” nelle equazioni; in caso contrario, il segno “-”.

GENERATORI CONTROLLATI

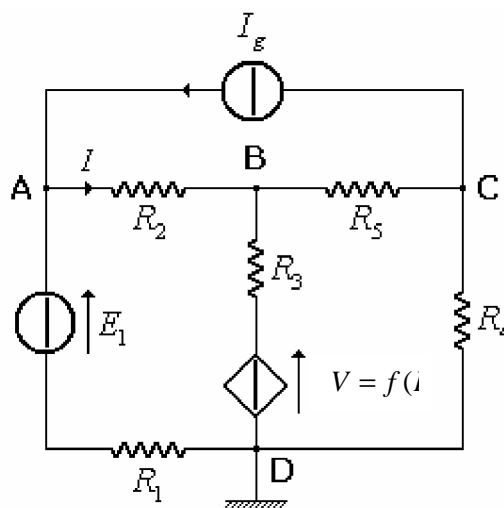
I generatori ideali visti fino a questo momento erano indipendenti, caratterizzati cioè da leggi costitutive in cui la tensione (gen. di tensione) o la corrente (gen. di corrente) avevano valori impressi dall'esterno del circuito e noti a priori. Tuttavia esiste un'altra categoria di generatori in cui la grandezza che definisce il componente è *controllata* da uno o più tensioni o correnti relativi a lati differenti da quello in cui agisce il generatore in oggetto: tali generatori vengono chiamati **generatori controllati**.

Nello schema elettrico, tali generatori vengono indicati con i seguenti simboli circuitali:



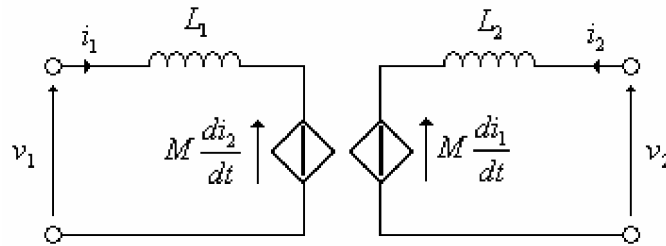
in cui con le x si sono indicate le grandezze di controllo (piloti) corrispondenti a correnti e/o tensioni agenti su altri lati del circuito stesso.

Ad esempio si consideri il circuito seguente,



in cui il generatore di tensione controllato indicato con V è pilotato dalla corrente I che circola sulla resistenza R_2 . La relazione $f(I)$ che definisce il generatore controllato può essere qualsiasi. Nel caso in cui $f(I)$ fosse lineare avremmo $V = r \cdot I$ (in questo caso il parametro di controllo r è costante ed ha le dimensioni di una resistenza). I generatori controllati vengono classificati come componenti attivi. Nonostante ciò, come vedremo studiando il teorema di Thevenin, essi hanno un comportamento tale che non sono mai spegnibili durante la *passivizzazione della rete*.

Utilizzando i generatori controllati è possibile ad esempio modellare, sempre attraverso un doppiobipolo, il fenomeno della mutua induttanza in questo modo:



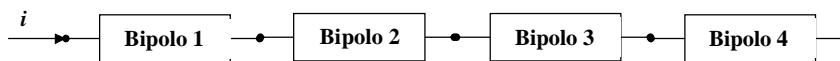
COLLEGAMENTI TRA BIPOLI

Connettendo insieme tra loro i bipoli finora descritti, siamo in grado di costruire un circuito o una rete di bipoli.

Hanno particolare importanza delle tipiche strutture che corrispondono a particolari collegamenti tra bipoli:

Collegamento in Serie di bipoli

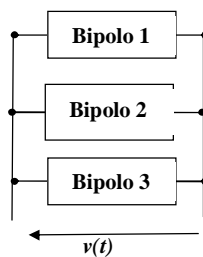
Un collegamento tra un numero p di diversi bipoli definisce una *serie* se ciascun bipolo del collegamento è attraversato dalla stessa corrente che attraversa tutti gli altri $p - 1$ bipoli



Esempio di 4 bipoli in serie tra loro(stessa i per ognuno)

Collegamento in Parallelo di bipoli

Un collegamento tra un numero p di diversi bipoli definisce un *parallelo* se ciascun bipolo del collegamento ha tra i suoi morsetti la stessa tensione che si misura tra i morsetti di tutti gli altri $p - 1$ bipoli.



Esempio di 3 bipoli in parallelo tra loro(stessa v per ognuno)

La serie ed il parallelo sono dunque collegamenti duali.

Incongruenze

- Non è possibile collegare *generatori di tensione* di valore diverso in parallelo tra loro. Ovviamente se le tensioni erogate dai generatori fossero tutte identiche in valore e polarità, il collegamento serie equivarrebbe ad un modello banale e ridondante. Se le tensioni fossero diverse tra loro il II principio di Kirchhoff sarebbe invece violato, cosa che è ovviamente impossibile.
- Non è possibile collegare *generatori di corrente* di valore diverso tra loro in serie. Ovviamente se le correnti erogate dai generatori fossero tutte identiche in valore e verso, il

collegamento equivarrebbe ad un modello banale e ridondante. Se le correnti fossero invece diverse tra loro, il I principio di Kirchhoff sarebbe violato, cosa che è ovviamente impossibile.

conseguentemente:

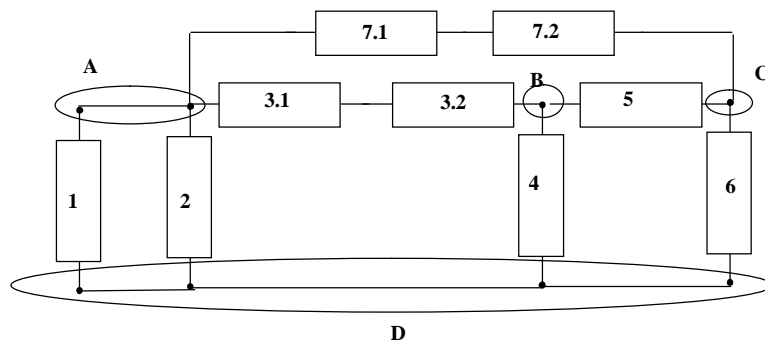
- E' possibile collegare un generatore di tensione a vuoto mentre non è possibile collegare un generatore di corrente a vuoto.
- Non si può mettere in cortocircuito un generatore ideale di tensione mentre può essere cortocircuitato un generatore ideale di corrente.

Concludendo, mentre i generatori, o bipoli attivi, possono funzionare, a meno di incongruenze, a prescindere dal circuito al quale sono connessi, i bipoli passivi - resistenza, induttanza e capacità- per il loro funzionamento hanno necessità di essere comunque collegati ad almeno un bipolo attivo.

TOPOLOGIA DEI CIRCUITI

Abbiamo detto che “assemblando” tra loro più bipoli o multipoli in modo da formare uno o più percorsi chiusi si crea un circuito elettrico (o rete elettrica).

Prendiamo in considerazione, per semplicità, ma senza perdere in generalità, una rete di bipoli. Riferiamoci all'esempio in figura:



Definizioni:

Si definisce **lato** un aggregato di bipoli interessati dalla stessa corrente (serie di bipoli) ai morsetti estremi e da un'unica tensione di lato. Nota: non si devono considerare *lati* i tratti di collegamento equipotenziale (corto-circuito ideale).

Si definisce **nodo** una regione equipotenziale del circuito a cui si connettono almeno tre lati. Non bisogna considerare come nodi distinti due punti del circuito collegati da tratti di collegamento equipotenziale (corto-circuito ideale).

Si definisce **maglia** un qualsiasi percorso chiuso composto da lati del circuito.

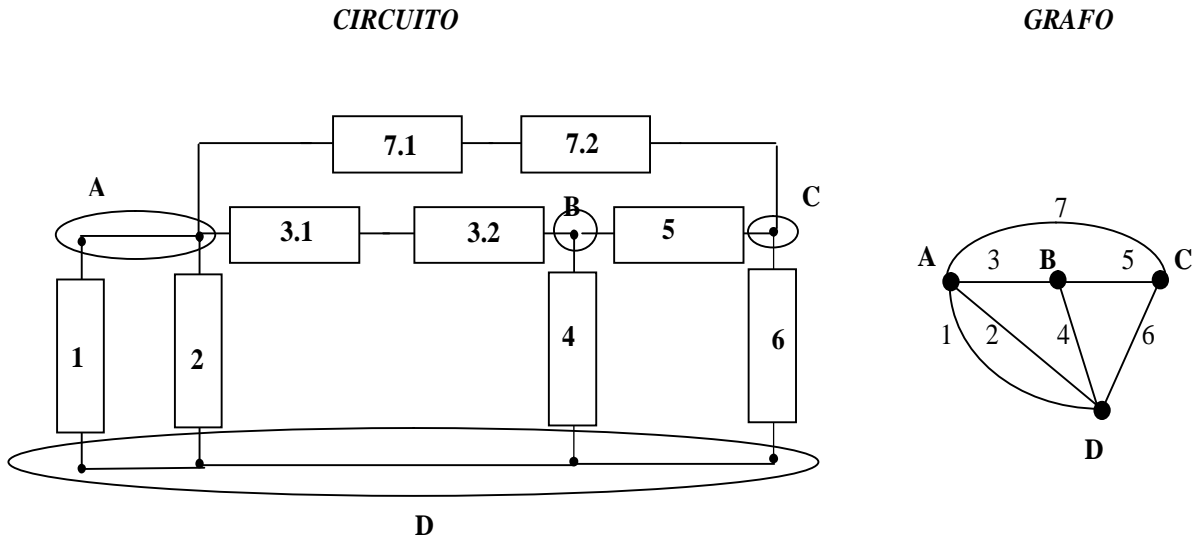
Ovviamente un lato collega sempre tra loro due diversi nodi del circuito.

Nella figura precedente si riconoscono sette *lati* e quattro *nodi*. Si noti, con riferimento alla precedente figura, come sia la regione A sia quella D sono considerate un *unico nodo* (avvertenza: un circuito può assumere “aspetto” grafico diverso a parità di “significato” elettrico). Da notare inoltre che il lato dove agiscono in serie i bipoli contrassegnati dalla sigla 3.1 e 3.2 ed il lato dove agiscono in serie i bipoli contrassegnati con la sigla 7.1, 7.2 e 7.3 costituiscono ciascuno un solo lato.

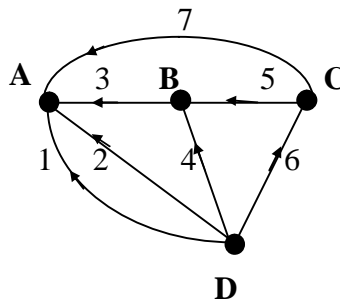
D'ora in poi converremo sempre di indicare i nodi attraverso una lettera maiuscola, mentre i lati saranno semplicemente numerati.

GRAFO

Ad un circuito si può sempre associare il suo *grafo*. Il *grafo* di un circuito è una rappresentazione stilizzata del circuito stesso ottenuta indicando i *nodi* attraverso un punto ed i *lati* attraverso semplici archi o segmenti. (Facciamo subito un'avvertenza: *non bisogna mai confondere il contatto equipotenziale sul circuito con il tratto che indica il lato sul grafo!*). Vediamo allora come si presenta il grafo del circuito di bipoli della figura precedente:

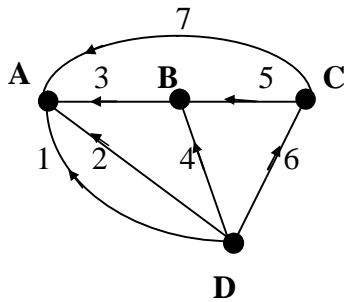


Se ora in modo arbitrario tracciamo su ogni lato del grafo una freccia otteniamo un **Grafo Orientato**:

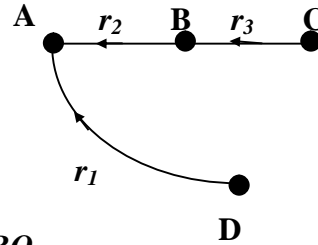


Definiamo inoltre **connesso** quel *grafo* tale che per una qualsiasi coppia di suoi nodi esiste sempre almeno un percorso di *lati* che li congiunge.

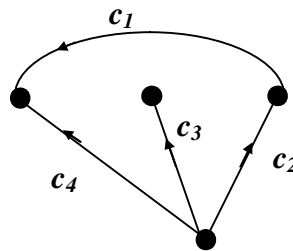
GRAFO ORIENTATO



UN SUO ALBERO



Relativo CO-ALBERO



ALBERO

Assegnato un *grafo* si definisce un suo *albero* un “sottografo” connesso formato da un insieme di lati che hanno la proprietà di “toccare” tutti i nodi del grafo senza formare percorsi chiusi.

Ovviamente per ogni grafo esistono numerosi alberi. Per gli scopi del corso basterà analizzarne solo uno senza preoccuparci di determinarli tutti (cosa comunque sempre possibile). I lati del grafo che fanno parte di un suo albero si diranno *rami* e saranno indicati, nel seguito, con la lettera *r* mentre le correnti e le tensioni che li riguardano saranno indicati con il pedice *r*.

Come si evince dalla figura i lati del grafo **1**, **3** e **5** sono stati rinominati per l'albero divenendo i rami: r_1 , r_2 e r_3 , rispettivamente.

CO-ALBERO

Si definisce *co-albero* il complementare dell'Albero rispetto al grafo. Dunque, dopo aver determinato un *albero* del *grafo*, il relativo *co-albero* si ottiene immediatamente andando a cancellare sul grafo i rami dell'albero. I lati del grafo che fanno parte di un co-albero si diranno *corde* e saranno indicati, nel seguito, con la lettera *c*, mentre le correnti e le tensioni che li riguardano saranno indicati, nel seguito, con il pedice *c*.

Come si evince dalla figura i lati del grafo **7**, **6**, **4** e **2** sono stati rinominati per il co-albero divenendo le corde: c_1 , c_2 , c_3 e c_4 , rispettivamente.

CARATTERISTICHE TOPOLOGICHE DEI CIRCUITI E PRINCIPI DI KIRCHHOFF

Abbiamo detto che il I PdK afferma che è nulla la sommatoria di tutte le p correnti entranti (o uscenti) che interessano una generica superficie chiusa: $\sum_{k=1}^p i_k = 0$. Ovviamente per un assegnato circuito si possono trovare numerose superfici per ognuna delle quali scrivere il I PdK relativo alle correnti dei lati che intersecano la generica sezione.

Abbiamo anche detto che il II PdK afferma che è nulla la sommatoria di tutte le m tensioni eseguita lungo un percorso chiuso orientato (è indifferente se in senso orario oppure in senso antiorario): $\sum_{k=1}^m v_k = 0$. Ovviamente per un assegnato circuito si possono trovare numerosi percorsi chiusi per ognuno dei quali si può scrivere il II PdK relativamente alle tensioni rilevabili ai capi di ciascun lato.

Abbiamo altresì visto che esistono delle leggi costitutive per i bipoli attivi e passivi che ci permettono di legare tra loro le tensioni con le correnti. Abbiamo anche detto che i lati di un circuito sono definiti dall'aver la stessa corrente. E' dunque intuibile che il trovare le correnti in ogni lato e/o le relative tensioni che agiscono ai capi di ogni lato permetterebbe di conoscere il comportamento elettrico di ogni singolo bipolo.

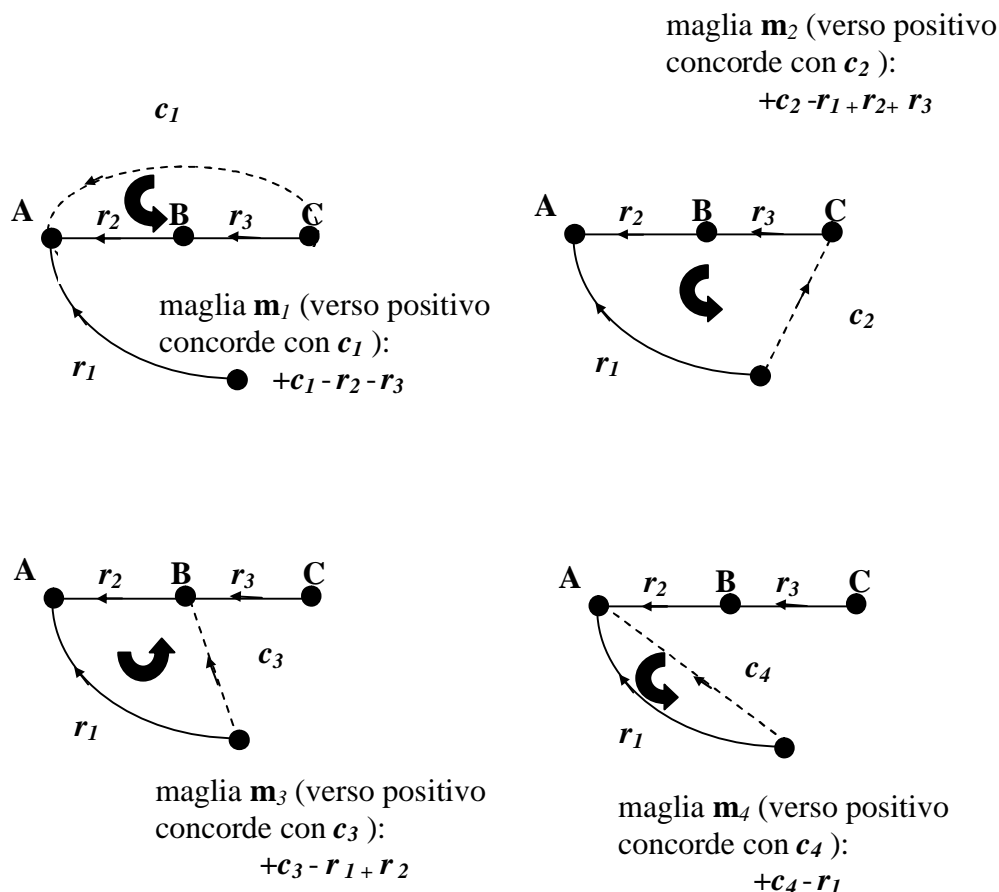
Si definisce **Problema fondamentale delle reti elettriche** la determinazione delle correnti in tutti i lati del circuito (e/o delle tensioni laddove la corrente fosse assegnata dalla presenza di bipoli generatori ideali di corrente).

Detto l il numero totale dei lati (per il circuito in esempio è $l = 7$) è intuibile che si dovrà scrivere un sistema algebrico risolvibile avente l equazioni indipendenti. Ci chiediamo se i due principi di Kirchhoff permettono di scrivere tale numero di equazioni indipendenti.

Dunque la domanda che ci si pone è: quante equazioni indipendenti si possono scrivere per il I PdK, e quante per il II PdK?

MAGLIE INDIPENDENTI

Come abbiamo detto una maglia è un qualunque percorso chiuso di lati. Per ogni insieme di lati che costituisce una maglia si può scrivere il II PdK. Si definiscono **maglie indipendenti** (o *fondamentali*) quei percorsi chiusi ottenuti aggiungendo all'albero una corda alla volta. Le maglie fondamentali sono dunque costituite da un percorso chiuso formato da *1 sola corda e per il resto da rami*.



Come si evince dalla precedente figura, dove si sono identificate le maglie, e dopo aver assunto come verso positivo della circuitazione quello concorde con il verso della relativa corda generatrice della maglia, si ha, per il II PdK:

$$\begin{cases} v_{c_1} - v_{r_2} - v_{r_3} = 0 \\ v_{c_2} - v_{r_1} + v_{r_2} + v_{r_3} = 0 \\ v_{c_3} - v_{r_1} + v_{r_2} = 0 \\ v_{c_4} - v_{r_1} = 0 \end{cases}$$

Il precedente sistema di equazioni è composto da equazioni tra loro sicuramente indipendenti perché in ogni equazione compare un elemento che non compare mai nelle altre equazioni (la *tensione della corda*).

Quindi il numero di equazioni indipendenti per il II PdK coincide con il numero delle corde del co-albero.

Disponiamo ora il sistema alle maglie in forma matriciale:

$$\begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{matrix} \begin{bmatrix} v_{c_1} \\ v_{c_2} \\ v_{c_3} \\ v_{c_4} \end{bmatrix} + \begin{matrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} v_{r_1} \\ v_{r_2} \\ v_{r_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La relativa forma compatta sarà:

$$\underset{c,1}{[v_c]} + \underset{c,r}{[A]} \underset{r,1}{[v_r]} = \underset{c,1}{[0]}$$

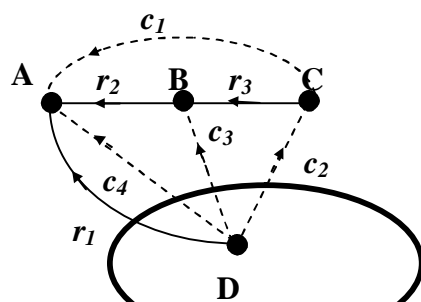
dove in basso a ciascun simbolo di matrice ne è riportata la dimensione (righe, colonne): c è il numero delle corde pari al numero delle maglie indipendenti; r è il numero dei rami.

Alla matrice $\underset{c,r}{[A]}$ si dà il nome di *matrice d'incidenza corde-rami*. Tale matrice è costituita da

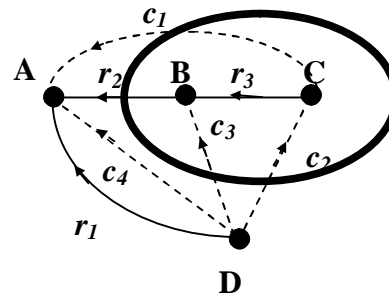
elementi $a_{i,j}$ tali da assumere il valore +1 oppure -1 a seconda che il j -mo ramo, che fa parte della i -ma maglia, abbia il suo verso di lato rispettivamente concorde (+1) oppure discorde (-1) con il verso di lato della i -ma corda; mentre $a_{i,j} = 0$ se il j -mo ramo non fa parte della i -ma maglia.

TAGLI INDIPENDENTI

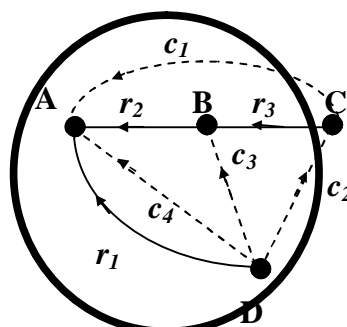
Immaginiamo di avvolgere con una superficie chiusa (nei disegni se ne vede solo la traccia) una porzione di circuito in modo da formare due sotto-circuiti collegati tra loro attraverso i lati che sono intersecati dalla superficie. L'insieme di questi lati si dirà insieme di *taglio*. Se si eliminasse dal grafo tutto l'insieme di taglio, il nuovo grafo sarebbe *non-connesso* perché parte dei nodi del grafo originario sarebbero ora in uno dei due sottocircuiti mentre la rimanente parte rimarrebbe confinata nell'altro sottocircuito. Per ogni possibile insieme di Taglio si scriverà il I PdK per le correnti.



Taglio T₁ (verso positivo uscente concorde con r_1) $r_1 + c_2 + c_3 + c_4$



Taglio T₂ (verso positivo uscente concorde con r_2) $r_2 + c_1 - c_2 - c_3$



Taglio T₃ (verso positivo entrante concorde con r_3) $r_3 + c_1 - c_2$

Si definiscono *tagli indipendenti (o fondamentali)* tutti quegli insiemi di taglio costituiti da lati tali che si abbia *1 solo ramo e per il resto corde*.

Come si evince dalla precedente figura, dove si sono identificati i tagli fondamentali avendo assunto come positivo il verso rispetto alla superficie chiusa concorde con il relativo orientamento del ramo, si ha per il I PdK:

$$\begin{cases} i_{r_1} + i_{c_2} + i_{c_3} + i_{c_4} = 0 \\ i_{r_2} + i_{c_1} - i_{c_2} - i_{c_3} = 0 \\ i_{r_3} + i_{c_1} - i_{c_2} = 0 \end{cases}$$

Il presente sistema è sicuramente formato da equazioni tra loro indipendenti perché in ogni equazione compare un elemento che non compare mai nelle altre equazioni (la corrente di ramo).

Quindi il numero di equazioni indipendenti per il I PdK coincide con il numero dei rami dell'albero..

Disponiamo il sistema ai tagli in forma matriciale:

$$\begin{matrix} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ T_1 \begin{bmatrix} i_{r_1} \\ i_{r_2} \\ i_{r_3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

La relativa forma compatta sarà:

$$\begin{bmatrix} i_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$\begin{matrix} r,1 & r,c & c,1 & r,1 \end{matrix}$

dove in basso a ciascun simbolo di matrice ne è riportata la dimensione (righe, colonne): c è il numero delle corde; r è il numero dei rami coincidente con il numero dei tagli indipendenti.

Alla matrice $\begin{bmatrix} B \end{bmatrix}$ si dà il nome di *matrice d'incidenza rami-corde*. Tale matrice è costituita da

elementi $b_{i,j}$ tali da assumere valore +1 oppure -1 seconda che la j -ma corda, che fa parte dell' i -mo taglio, abbia il suo verso di lato rispettivamente concorde (+1) oppure discorde (-1) con il verso di lato dell' i -mo ramo; mentre $b_{i,j} = 0$ se la j -ma corda non fa parte dell' i -mo taglio.

Verifichiamo immediatamente che:

il numero dei lati vale $l = r + c$ (nel nostro caso è infatti $l = 7$, e $r = 3$, $c = 4$).

Notiamo inoltre che, detto N il numero dei nodi (nell'esempio $N = 4$), si ha: $r = N - 1$. Se si scrive il I PdK per ciascun nodo, il sistema risultante sarà ancora formato da equazioni indipendenti.

Se il circuito è planare, cioè è tutto disegnabile su un piano senza accavallamento di lati, si possono sempre individuare delle maglie del circuito che siano tali da non contenere al loro interno altre maglie. Siffatte maglie sono anche dette *anelli*. E' facile verificare che detto m il numero degli anelli si ha sempre: $m = c$. Se si scrive il II PdK per ciascun anello, il sistema risultante sarà ancora formato da equazioni indipendenti. Quindi se ci si riferisce alle equazioni indipendenti per i due PdK, si ha anche che: $l = m + N - 1$.

Notiamo infine una importante proprietà. Confrontando i due sistemi di equazioni relativi ai PdK in forma matriciale per tagli e maglie si trova che è sempre:

$$[B]_{r,c} = -[A]_{c,r}^T$$

Cioè la matrice di incidenza rami-corde è uguale alla trasposta cambiata di segno della matrice d'incidenza corde-rami. Da tale proprietà discende che i *Principi di Kirchhoff non sono tra loro indipendenti*.

Infatti nel caso del grafo dell'esempio precedente si è trovato che:

$$[A]_{c=4,r=3} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } [B]_{r=3,c=4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Come vedremo operativamente nel seguito, basterà dunque applicare solo uno dei due principi per ottenere il sistema di equazioni in grado di risolvere un circuito. Da un punto di vista di "costo" computazionale il risparmio che si ottiene è senz'altro evidente (basti pensare, tanto per farsi un'idea di tale "risparmio", a grafi in cui ci sono solo 2 nodi collegati tra loro attraverso un numero grande a piacere l di lati: applicando il solo I PdK si scriverà sempre solo 1 equazione contro le l che occorrerebbero introducendo anche il II PdK).

Infine osserviamo che la dualità si estende, oltre ai termini incontrati in precedenza, anche ai concetti di *taglio e maglia, nodo e anello*. Anche i due principi di Kirchhoff sono tra loro duali.

BILANCIO ENERGETICO

Ci proponiamo di verificare che il modello circuitale rispetta il Principio di Conservazione dell'Energia. Ciò significa che, a parità di convenzione applicata a ciascun lato del circuito (utilizzatori o generatori), la somma delle potenze (assorbite o erogate) è nulla. Se assumiamo che con la freccia che orienta ogni lato del grafo si è indicato sia il verso di riferimento della corrente di lato, sia il verso con cui si calcola la tensione di lato, allora abbiamo assunto per tutti i lati la convenzione dei generatori. Se si sommano tutti i prodotti tensione-di-lato per corrente-di-lato, eseguiti per ciascun lato, la sommatoria risultante deve essere nulla. Infatti la sommatoria in oggetto è pari alla somma di tutte le potenze "assunte come se fossero tutte erogate".

Rappresentiamo, in forma matriciale, la sommatoria dei prodotti sopra citati:

$$\sum_{k=1}^l v_k i_k = \sum_{k=1}^c v_{c_k} i_{c_k} + \sum_{k=1}^r v_{r_k} i_{r_k} = [v_c]^T [i_c] + [v_r]^T [i_r]$$

dal I Pdk e il II Pdk precedentemente scritti si ha che:

$$[i_r]_{r,l} - [A]_{r,c}^T [i_c]_{c,l} = [0]_{r,l} \rightarrow [i_r]_{r,l} = [A]_{r,c}^T [i_c]_{c,l}$$

e

$$[v_c]_{c,l} = -[A]_{c,r} [v_r]_{r,l}$$

Sostituendo, si trova che:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^l v_k i_k &= [v_c]^T [i_c] + [v_r]^T [i_r] = \{-[A][v_r]\}^T [i_c] + [v_r]^T [A]^T [i_c] = \\ &= -[v_r]^T [A]^T [i_c] + [v_r]^T [A]^T [i_c] = 0 \end{aligned}$$

Come si voleva verificare. Dunque un circuito rispetta il bilancio energetico.

TEOREMA DI TELLEGEN

Dalla precedente dimostrazione del bilancio energetico, si può notare il ruolo giocato dalle matrici d'incidenza. Tali matrici evidenziano, come visto, le proprietà topologiche del grafo e dei PdK. Ora, poiché ad uno stesso grafo possono corrispondere infiniti circuiti diversi, ci proponiamo di verificare cosa accade se ripetiamo la dimostrazione del bilancio energetico con la seguente variante: si calcoli il solo II PdK su un certo circuito, che indichiamo con (a), mentre si applichi il solo I PdK ad un altro circuito, che indichiamo con (b), che presenta differenti bipoli sui lati rispetto ad (a), ma che possiede lo stesso grafo di (a). Si avrà:

$$\sum_{k=1}^l v_k^a i_k^b = \sum_{k=1}^c v_{c_k}^a i_{c_k}^b + \sum_{k=1}^r v_{r_k}^a i_{r_k}^b = [v_c^a]^T [i_c^b] + [v_r^a]^T [i_r^b],$$

dal I PdK su (b) e dal II PdK su (a) si ha:

$$\begin{bmatrix} i_{r,1} \\ \vdots \\ i_{r,c} \end{bmatrix} - [A]^T \begin{bmatrix} i_{c,1} \\ \vdots \\ i_{c,c} \end{bmatrix} = [0] \rightarrow \begin{bmatrix} i_{r,1} \\ \vdots \\ i_{r,c} \end{bmatrix} = [A]^T \begin{bmatrix} i_{c,1} \\ \vdots \\ i_{c,c} \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} v_{c,1}^a \\ \vdots \\ v_{c,c}^a \end{bmatrix} = -[A] \begin{bmatrix} v_{r,1}^a \\ \vdots \\ v_{r,c}^a \end{bmatrix}$$

per cui

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^l v_k^a i_k^b &= [v_c^a]^T [i_c^b] + [v_r^a]^T [i_r^b] = \left\{ -[A][v_r^a] \right\}^T [i_c^b] + [v_r^a]^T [A]^T [i_c^b] = \\ &= -[v_r^a]^T [A]^T [i_c^b] + [v_r^a]^T [A]^T [i_c^b] = 0 \end{aligned}$$

Questo risultato notevole è noto come **Bilancio delle Potenze Virtuali**, o **Teorema di Tellegen**.

RETI DI RESISTORI – RETI SENZA MEMORIA

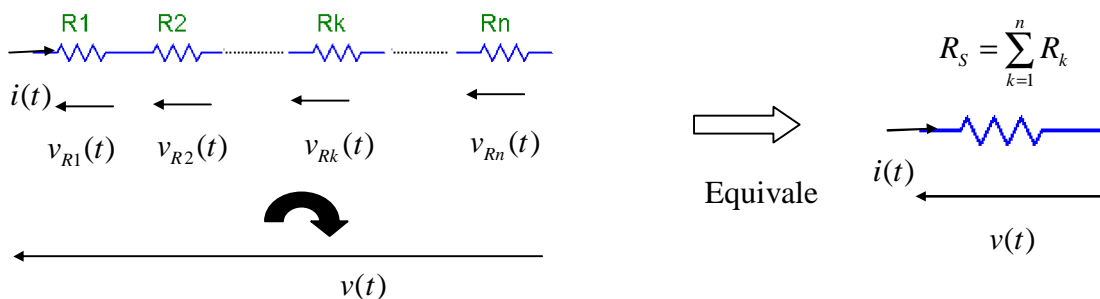
Prima di introdurre lo studio dei circuiti composti da tutte le tipologie di bipoli fin qui presentate, tratteremo delle reti *resistive pure* anche dette *reti senza memoria*.

Inoltre considereremo i resistori che le compongono lineari.

LEGGI COSTITUTIVE DEI LATI PER RETI SENZA MEMORIA

Serie di Resistori

Consideriamo n resistori collegati in serie. Si indichi con $v(t)$ la tensione totale ai capi della serie e con $i(t)$ la corrente che fluisce in ogni resistore.



Con riferimento alla figura, si scriva il II PdK al percorso chiuso composto dai resistori in serie e dalla tensione totale $v(t)$:

$$v(t) - \sum_{k=1}^n v_{Rk}(t) = 0$$

Applichiamo ora a ciascun resistore la sua legge costitutiva (con i versi in figura siamo in convenzione degli utilizzatori):

$$v_{Rk}(t) = R_k i(t)$$

(l'assenza di pedice distintivo per la corrente è ovviamente dovuto al fatto che per i componenti in serie la corrente è la stessa). Inserendo le leggi costitutive nell'espressione precedente del II PdK si ha, mettendo in evidenza la corrente:

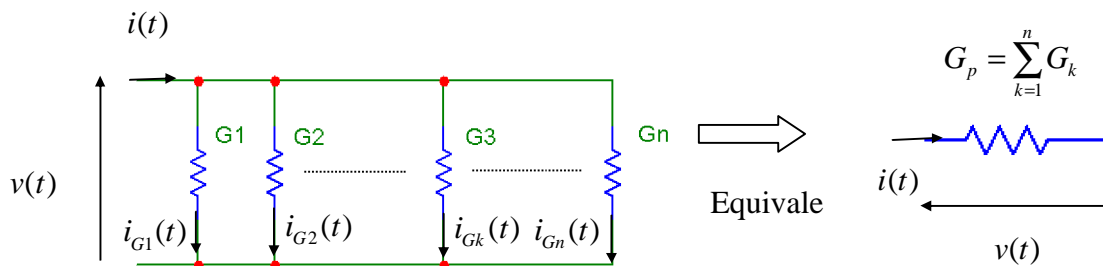
$$v(t) = \sum_{k=1}^n v_{Rk}(t) = i(t) \cdot \sum_{k=1}^n R_k$$

Possiamo allora affermare che la resistenza offerta (all'esterno) da n resistori collegati in serie, equivale a quella offerta da un unico resistore il cui valore di resistenza, R_s , è pari alla somma di tutte le resistenze della serie:

$$R_s = \sum_{k=1}^n R_k .$$

Parallelo di Resistori

Consideriamo n resistori collegati in parallelo. Si indichi con $i(t)$ la corrente totale assorbita da tutto il parallelo soggetto alla tensione $v(t)$ che, per definizione di parallelo, è la stessa per ogni resistore. Ogni k -mo resistore sia definito dal valore della propria conduttanza G_k .



Con riferimento alla figura, si scriva il I PdK ad uno dei due nodi del parallelo:

$$i(t) - \sum_{k=1}^n i_{Gk}(t) = 0$$

Applichiamo ora a ciascun resistore la sua legge costitutiva (con i versi in figura siamo in conv. degli utilizzatori):

$$i_{Gk}(t) = G_k v(t)$$

(l'assenza di pedice distintivo per la tensione è ovviamente dovuto al fatto che per i componenti in parallelo la tensione è la stessa). Inserendo le leggi costitutive nell'espressione precedente del I PdK si ha, mettendo in evidenza la tensione:

$$i(t) = \sum_{k=1}^n i_{Gk}(t) = v(t) \cdot \sum_{k=1}^n G_k$$

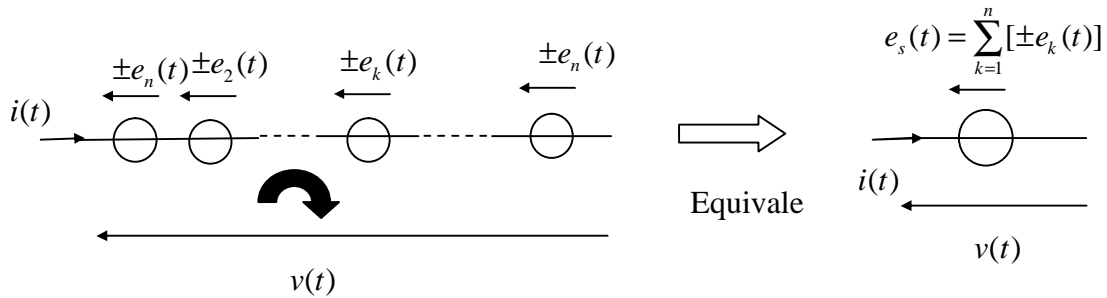
Possiamo allora affermare che la conduttanza offerta (all'esterno) da n resistori collegati in parallelo, equivale a quella offerta da un unico resistore il cui valore di conduttanza, G_p , è pari alla somma di tutte conduttanze del parallelo:

$$G_p = \sum_{k=1}^n G_k .$$

E' evidente la dualità che esiste tra serie e parallelo; scambiando tensione con corrente e resistenza con conduttanza le leggi di equivalenza sono le stesse.

Serie di Generatori indipendenti ideali di tensione

Consideriamo n generatori ideali di tensione collegati in serie. Si indichi con $v(t)$ la tensione totale ai capi della serie e con $i(t)$ la corrente che fluisce in ogni generatore ideale. Contrariamente al caso della serie tra resistori, dobbiamo ora considerare che due o più generatori possono presentarsi, in una serie, con versi di polarità opposti. Poiché, in figura abbiamo assunto tutte le frecce dei generatori concordi tra loro, dobbiamo pensare di aver cambiato segno a quei generatori la cui polarità era invertita. Solo così possiamo pensare di disporli tutti con la stessa polarità. Ciò giustifica, nella scrittura del valore della tensione erogata, la comparsa del simbolo "±".



Con riferimento alla figura, si scriva il II PdK al percorso chiuso composto dai generatori ideali e dalla tensione totale $v(t)$:

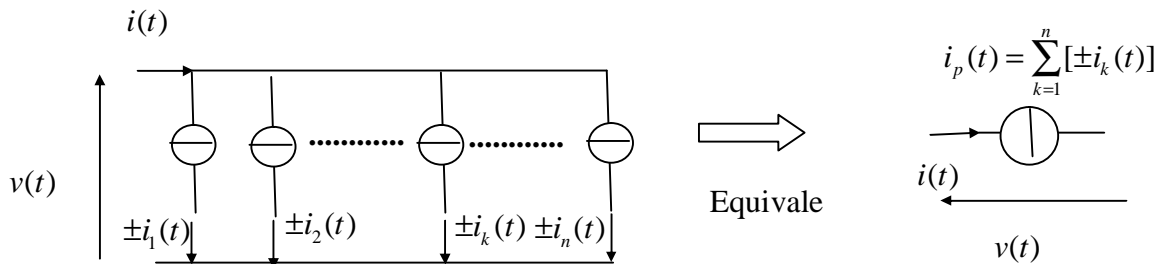
$$v(t) - \sum_{k=1}^n \pm e_k(t) = 0$$

E' immediatamente evidente che la tensione offerta (all'esterno) da n generatori ideali di tensione collegati tra loro in serie, equivale a quella offerta da un unico generatore ideale di tensione il cui valore di tensione, $e_s(t)$, è pari alla somma algebrica di tutte le fem della serie:

$$e_s(t) = \sum_{k=1}^n [\pm e_k(t)].$$

Parallelo di Generatori indipendenti ideali di corrente

Consideriamo n generatori ideali di corrente collegati in parallelo. Si indichi con $i(t)$ la corrente totale relativa a tutto il parallelo soggetto alla tensione $v(t)$. Contrariamente al caso del parallelo tra resistori, dobbiamo ora considerare che due o più generatori possono presentarsi, in un parallelo, con versi di polarità opposti. Poiché, in figura abbiamo assunto tutte le frecce dei generatori concordi tra loro, dobbiamo pensare di aver cambiato segno a quei generatori la cui polarità era invertita. Solo così possiamo pensare di disporli tutti con la stessa polarità. Ciò giustifica, nella scrittura del valore della corrente erogata, la comparsa del simbolo "±".



Con riferimento alla figura, si scriva il I PdK ad uno dei due nodi del parallelo:

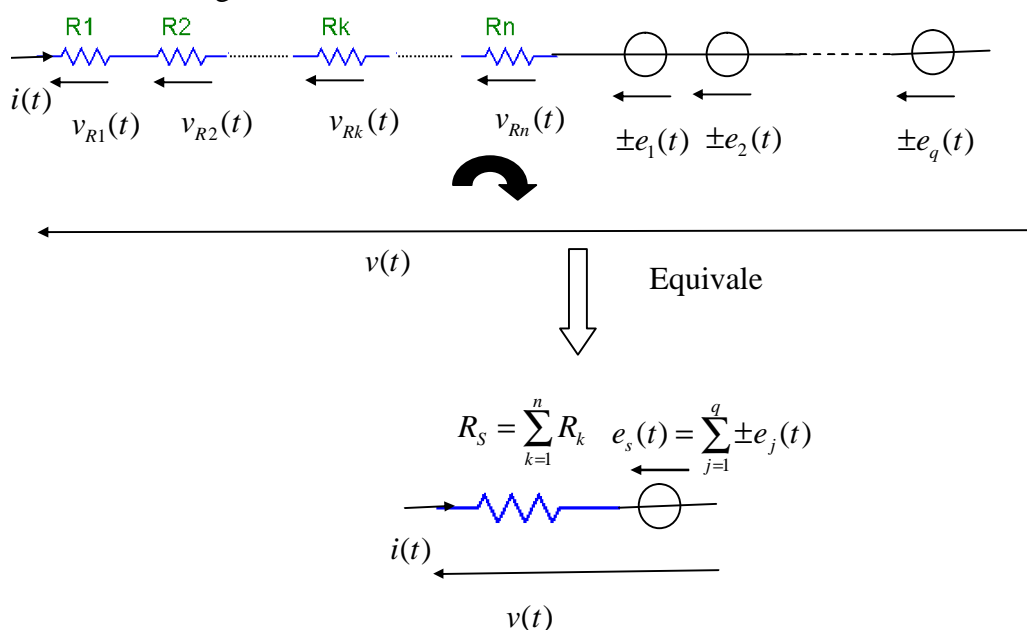
$$i(t) - \sum_{k=1}^n \pm i_k(t) = 0$$

E' immediatamente evidente che la corrente offerta (all'esterno) da n generatori ideali di corrente collegati tra loro in parallelo, equivale a quella offerta da un unico generatore ideale di corrente il cui valore di tensione è pari alla somma algebrica di tutte le correnti del parallelo:

$$i_p(t) = \sum_{k=1}^n [\pm i_k(t)].$$

Serie di Resistori e di Generatori ideali di tensione – Legge di Ohm generalizzata

Consideriamo un collegamento in serie di n resistori e q generatori ideali di tensione come in figura (si badi che ogni elemento può apparire nella serie comunque permutato di posto perché l'ordine è indifferente). Si indichi con $v(t)$ la tensione totale ai capi della serie e con $i(t)$ la corrente che fluisce in ogni elemento della stessa.



Con riferimento alla figura, si scriva il II PdK al percorso chiuso composto dai resistori in serie e dalla tensione totale $v(t)$:

$$v(t) - \sum_{k=1}^n v_{Rk}(t) - \sum_{j=1}^q \pm e_j(t) = 0$$

Applichiamo ora a ciascun resistore la sua legge costitutiva (con i versi in figura siamo in convenzione degli utilizzatori):

$$v_{Rk}(t) = R_k i(t)$$

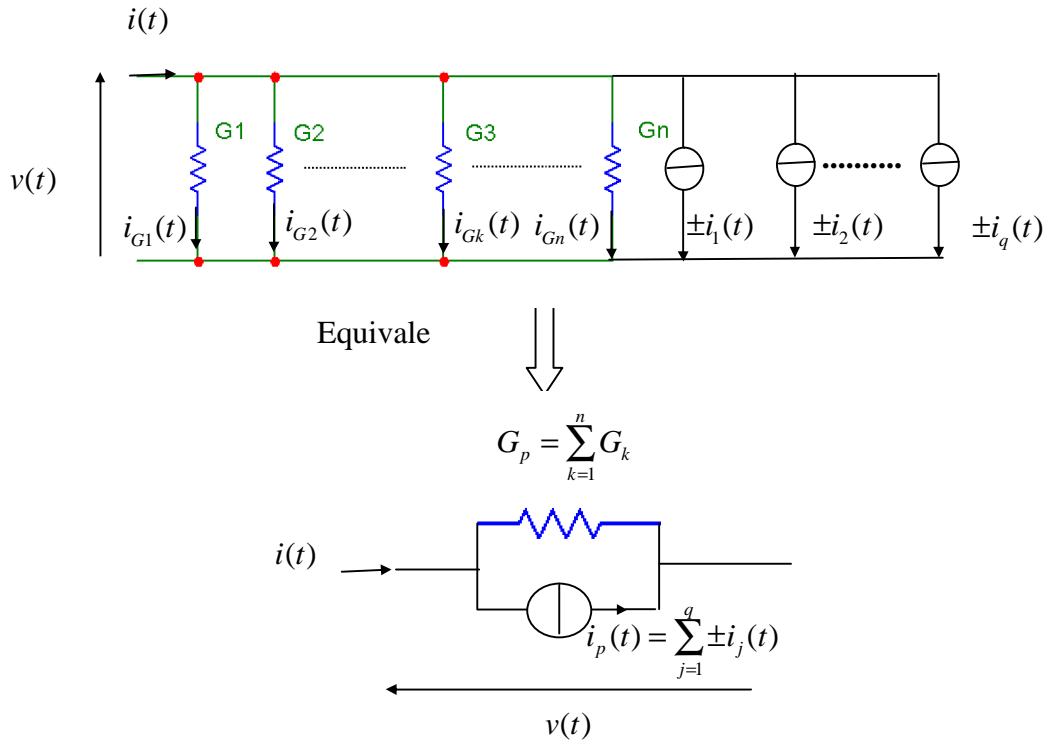
(l'assenza di pedice distintivo per la corrente è ovviamente dovuto al fatto che per i componenti in serie la corrente è la stessa). Inserendo le leggi costitutive nell'espressione precedente del II PdK si ha, mettendo in evidenza la corrente:

$$v(t) = i(t) \cdot \sum_{k=1}^n R_k + \sum_{j=1}^q \pm e_j(t) = R_s i(t) + e_s(t).$$

La relazione sopra scritta prende anche nome di legge di Ohm generalizzata. Il lato equivalente (vedi figura precedente), composto dalla serie tra una resistenza (equivalente) e un generatore (equivalente) viene detto *lato in forma Thevenin*.

Parallelo di Resistori e di Generatori ideali di Corrente

Consideriamo un collegamento in parallelo di n resistori e q generatori ideali di corrente come in figura (si badi che ogni elemento può apparire nella serie comunque permutato di posto perché l'ordine è indifferente). Si indichi con $i(t)$ la corrente totale assorbita da tutto il parallelo soggetto alla tensione $v(t)$ che, per definizione di parallelo, è la stessa per ogni resistore. Ogni k -mo resistore sia definito dal valore della propria conduttanza G_k .



Con riferimento alla figura, si scriva il I PdK ad uno dei due nodi del parallelo:

$$i(t) - \sum_{k=1}^n i_{G_k}(t) - \sum_{j=1}^q \pm i_j(t) = 0$$

Applichiamo ora a ciascun resistore la sua legge costitutiva (con i versi in figura siamo in conv. degli utilizzatori):

$$i_{G_k}(t) = G_k v(t)$$

(l'assenza di pedice distintivo per la tensione è ovviamente dovuto al fatto che per i componenti in parallelo la tensione è la stessa). Inserendo le leggi costitutive nell'espressione precedente del I PdK si ha, mettendo in evidenza la tensione:

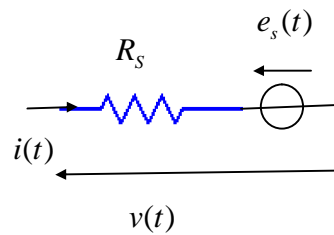
$$i(t) = v(t) \cdot \sum_{k=1}^n G_k + \sum_{j=1}^q \pm i_j(t) = G_p v(t) + i_p(t)$$

La relazione sopra scritta è la legge costitutiva del lato equivalente (vedi figura precedente), composto dal parallelo tra una resistenza (equivalente) e un generatore di corrente (equivalente) viene detto *lato in forma Norton*.

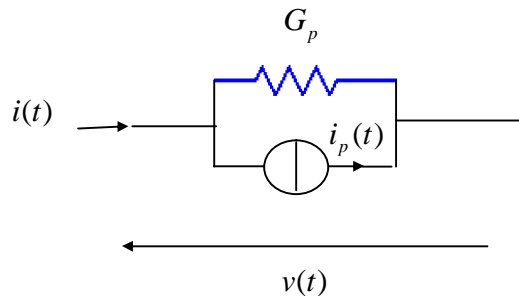
E' evidente la dualità che esiste tra le forme *Thevenin* e *Norton*.

Trasformazioni da forma Thevenin a forma Norton e viceversa

Sia assegnata la forma Thevenin di un lato, cioè sia nota la resistenza R_s e la tensione $e_s(t)$ erogata dal generatore del lato serie in figura:



Si vogliono determinare i valori di $R_p = \frac{1}{G_p}$ e di $i_p(t)$ della forma Norton in figura in modo che per un qualsiasi circuito esterno che si connettesse con il lato le due forme siano equivalenti.



Avvertenza: come si vede dalle due figure nella forma Thevenin il lato è costituito effettivamente da bipoli percorsi dalla stessa corrente; nella forma Norton, invece, il lato è composto da 2 sub-lati in parallelo tra loro. Ovviamente, per i nostri scopi, il lato è da considerare sempre quello dove scorre la corrente $i(t)$ e ai cui capi si misura la tensione $v(t)$.

Per passare da una forma all'altra, dunque si devono trovare i parametri che danno luogo alla stessa intensità di corrente e alla stessa tensione per qualunque situazione di funzionamento.

Consideriamo dunque, nota la forma Thevenin, le due situazioni estreme di lato "a vuoto" e di lato in corto-circuito.

Nel primo caso ("a vuoto") la corrente che di lato che si dovrebbe chiudere all'esterno deve valere, per definizione, $i(t) = 0$; dunque le leggi costitutive diventano:

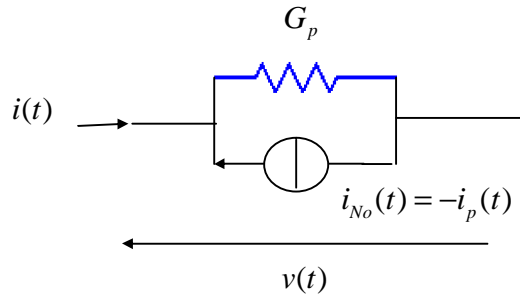
$$\text{forma Thevenin: } v(t) = R_s \cdot 0 + e_s(t) = e_s(t)$$

$$\text{forma Norton: } i(t) = v(t) \cdot G_p + i_p(t) = 0 \rightarrow v(t) = -\frac{i_p(t)}{G_p} = -R_p i_p(t)$$

Se invertiamo il riferimento per il generatore di corrente (vedi figura successiva), si ha ovviamente: $i_{No}(t) = -i_p(t) = G_p v(t)$ e quindi $i_{No}(t) = G_p v(t) \rightarrow$

$$e_s(t) = v(t) = \frac{i_{No}(t)}{G_p} = R_p i_{No}(t)$$

che è la prima relazione di trasformazione



Nel secondo caso (“*cortocircuito*”) la tensione di lato deve valere, per definizione di cortocircuito, $v(t) = 0$; dunque le leggi costitutive diventano:

$$\text{forma Thevenin: } v(t) = R_s \cdot i(t) + e_s(t) = 0 \rightarrow i(t) = -\frac{e_s(t)}{R_s} = -G_s e_s(t)$$

$$\text{forma Norton: } i(t) = 0 \cdot G_p - i_{No}(t) = 0 \rightarrow i(t) = -i_{No}(t)$$

dovendosi descrivere la stessa cosa, dall’uguaglianza delle due relazioni precedenti si ha:

$$i_{No}(t) = G_s e_s(t)$$

che è la seconda relazione di trasformazione.

Ricapitolando per operare la Trasformazione da lato *Thevenin* a lato *Norton* si deve porre:

$$e_s(t) = R_p i_{No}(t)$$

che sostituita nella penultima relazione offre:

$$i_{No}(t) = G_s R_p i_{No}(t) \rightarrow G_s R_p = 1 \rightarrow R_p = R_s .$$

E’ dunque sempre possibile, passare da una rappresentazione *Thevenin* (*Norton*) alla sua forma equivalente in rappresentazione *Norton* (*Thevenin*).

METODI GENERALI PER L’ANALISI DEI CIRCUITI

Affrontiamo ora il problema fondamentale delle reti elettriche. Ci proponiamo di determinare tutte le grandezze di lato in termini di tensione e/o corrente.

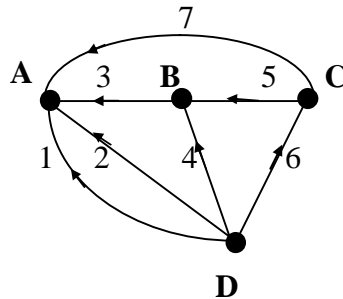
In precedenza abbiamo visto come i PdK non sono indipendenti e abbiamo detto che basta applicare solo uno dei due principi per ottenere il sistema di equazioni in grado di risolvere interamente un circuito. Chiariamo che con il termine “risolvere” intendiamo trovare il numero minimo di incognite da mettere a sistema. E’ evidente che le “*effettive*” incognite, sono le tensioni e le correnti di lato. Ma, come stiamo per vedere, non c’è bisogno di “mettere a sistema” tante equazioni quante sono le “*effettive*” incognite. Sarà sufficiente, infatti trovare il numero minimo di equazioni da risolvere contemporaneamente, da mettere cioè “a sistema”, mentre le rimanenti incognite saranno calcolabili con espressioni algebriche “singole”, cioè basterà scrivere una sola equazione da risolvere senza ricorrere a sistemi.

Vediamo come.

METODO DEI NODI

Il metodo dei Nodi sfrutta solo il I PdK.

Consideriamo un circuito il cui grafo orientato sia coincidente con quello in figura (avente $n = 4$ nodi e $l = 7$ lati):



Il I PdK relativamente a $n-1$ nodi si può rappresentare in forma matriciale tramite la *matrice di incidenza nodi-lati*:

$$[A] \cdot [i_l] = [0]$$

$n-1, l$ $l, 1$ $n-1, 1$

Nel caso del grafo in figura si ha, relativamente ai nodi A, B, C (il nodo D è il nodo escluso):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dove si identifica la **matrice di incidenza nodi-lati**.

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$n-1, l$

in cui le righe rappresentano i nodi indipendenti, nell'ordine (dall'alto verso il basso) A, B e C, mentre le colonne i lati orientati del grafo nell'ordine numerico (da sinistra verso destra) da 1 a 7. In particolare ogni elemento della matrice d'incidenza nodi-lati (da non confondere con quella di incidenza corde-rami incontrata in precedenza) presenta elementi tali che:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il lato } j \text{ entra nel nodo } i \\ -1 & \text{se il lato } j \text{ esce dal nodo } i \\ 0 & \text{se il lato } j \text{ non afferisce al nodo } i \end{cases}$$

(Si fa notare come molti autori invertano il segno nella matrice, mettendo il +1 se il lato esce dal nodo; tale posizione è ininfluente come si capisce dalla scrittura in forma matriciale del I PdK: E' chiaro che scrivere $\pm[A] \cdot [i_l] = [0]$ è del tutto analogo ai fini algebrici).

$n-1, l$ $l, 1$ $n-1, 1$

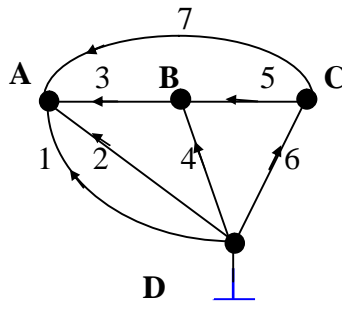
Introduciamo ora una nuova variabile: il **potenziale nodale**. Per *potenziale nodale* si intende la differenza di potenziale tra un nodo rispetto a quello del nodo che non compare nella scrittura

del I PdK (che d'ora in poi chiameremo *nodo di riferimento* o *nodo di saldo*: nel caso dell'esempio è il nodo D). Al nodo di riferimento si impone ad arbitrio il potenziale zero.

Allora, in riferimento al solito grafo di esempio, si possono scrivere i potenziali nodali adoperando il simbolo V a cui assoceremo un pedice con lettera coincidente col nome del nodo in esame. Così, V_A è il potenziale nodale del nodo A, V_B quello del nodo B e così via. Indicheremo altresì col simbolo



il nodo prescelto come nodo di riferimento, nel caso dell'esempio è il nodo "D". I potenziali nodali sono indicabili con frecce uscenti dal nodo di riferimento e con punte sempre rivolte verso il singolo nodo. Con la v indicheremo, come di consueto, la tensione di lato pensata orientata come la freccia sul lato del grafo (i lati sono così assunti in convenzione dei generatori, poiché con lo stesso verso di freccia abbiamo scelto di indicare sia la tensione sia il verso della corrente di lato). E' evidente che la tensione su ogni lato sarà ottenibile dalla differenza di due potenziali nodali; comparirà solo un termine se il lato è collegato al nodo di saldo.



Scriviamo dunque delle relazioni che ci indichino il valore delle tensioni di lato in funzione dei potenziali nodali:

$$\begin{cases} v_1 = V_A \\ v_2 = V_A \\ v_3 = V_A - V_B \\ v_4 = V_B \\ v_5 = V_B - V_C \\ v_6 = V_C \\ v_7 = V_A - V_C \end{cases}$$

Questo sistema, nelle incognite V_A , V_B e V_C può essere posto in forma matriciale:

$$[v_l] = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix}$$

In forma più generale:

$$[v_l]_{l,1} = [K]_{l,n-1} \cdot [V_{no}]_{n-1,1}$$

con $[v_l]$ indichiamo il vettore colonna delle tensioni di lato e con $[V_{no}]$ il vettore dei potenziali nodali.

Si nota che esiste una relazione tra la *matrice d'incidenza nodi-lati* $[A]$ e la matrice $[K]$:

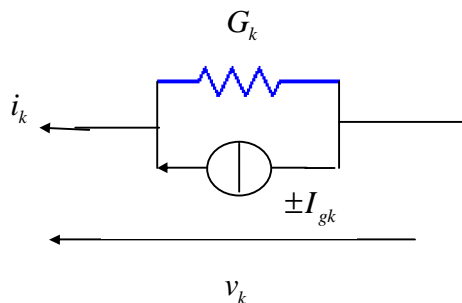
$$[K] = [A]^T$$

Dunque possiamo scrivere:

$$\begin{cases} [A] \cdot [i_l] = [0] \\ [A]^T \cdot [V_{no}] = [v_l] \end{cases} \quad (*)$$

Per la risoluzione delle reti attraverso il metodo dei nodi useremo, come incognite, i potenziali nodali. Per applicare questo metodo di risoluzione bisogna allora rappresentare tutti i lati in cui agiscono bipoli attivi nel loro equivalente *Norton*. Ciò è dovuto al fatto che adoperiamo il solo I PdK che controlla unicamente la somma di correnti.

Quindi ogni generico lato, dopo aver operato le serie delle resistenze di lato, qualora su un lato ce ne sia più di una, e dopo aver operato l'eventuale serie dei generatori ideali di tensione, si troverà in *forma Thevenin* che dovrà essere trasformata nella relativa equivalente *forma Norton*. Ovviamente ci potranno essere lati che già si trovano in *forma Norton*. Ricordiamo che la *forma Norton* considera il *lato* (quello che appare sul grafo) formato dal parallelo di due *sub-lati*, uno attivo (generatore ideale di corrente) ed uno passivo. Lo schema Norton relativo ad un generico *k-mo lato* in convenzione dei generatori è:



La legge costitutiva del *lato*, con i versi assegnati in figura si ottiene imponendo il I PdK:

$$i_k = \pm I_{gk} - G_k v_k$$

Casi particolari di tale forma sono:

- 1) *lato* formato dal solo generatore di corrente. Ciò equivale a dire che la conduttanza di lato $G_k = 0$ (infatti il *sub-lato* passivo sarebbe un tratto aperto a resistenza infinita).
- 2) *lato* formato da sola resistenza, che equivale a porre che $I_{gk} = 0$.

Non sono compatibili con il *metodo dei nodi* i *lati* che presentano soltanto generatori di tensione senza avere elementi passivi (*lati* non trasformabili in *forma Norton*).

In forma matriciale, la legge costitutiva diviene:

$$[i_l]_{l,1} = [I_{gl}]_{l,1} - [G_l]_{l,l} [v_l]_{l,1} \quad (**)$$

La matrice $[G_l]$ che è quadrata è una matrice diagonale, ha tutti gli elementi nulli a meno quelli della diagonale principale dove compaiono i valori delle conduttanze di lato. Ovviamente si ha uno zero sulla diagonale principale solo se manca il *sub-lato* passivo secondo lo schema *Norton*, in quel lato.

Il significato dei vettori colonna è chiaro, alla luce di quanto finora detto.

Inseriamo le (***) nella prima delle (*). Si ha:

$$[A]_{n-1,l} \cdot \left\{ [I_{gl}]_{l,1} - [G_l]_{l,l} [V_l]_{l,1} \right\} = 0$$

Definiamo il vettore colonna delle **correnti nodali**:

$$[I_{n0}] = [A]_{n-1,l} \cdot [I_{gl}]_{l,1}$$

che costituisce il vettore dei termini noti del sistema risolvete.

Adoperiamo ora la seconda delle (*) $[v_l] = [A]^T [V_{no}]$ ottenendo:

$$[I_{n0}] = [A]_{n-1,l} \cdot [G_l]_{l,l} \cdot [A]^T_{n-1,l} [V_{no}]$$

ed infine

$$[I_{no}] = [G_{no}] \cdot [V_{no}]$$

che è la formulazione matriciale del Metodo dei Nodi.

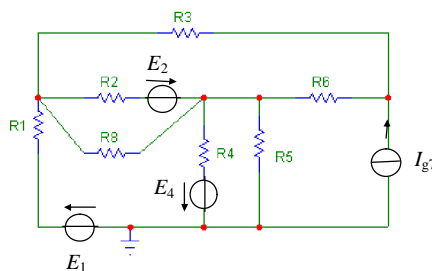
La matrice quadrata

$$[G_{no}]_{n-1,l} = [A]_{n-1,l} \cdot [G_l]_{l,l} \cdot [A]^T_{n-1,l}$$

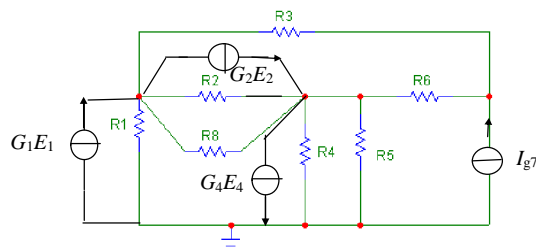
è detta matrice delle **conduttanze nodali** e costituisce la matrice dei coefficienti del sistema algebrico.

Esempio Applicativo:

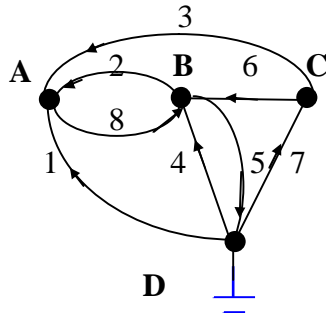
Del circuito in figura si determinino le correnti e le tensioni di ciascun lato applicando il metodo dei nodi. Dati:



Lo stesso circuito dopo aver rappresentato tutti i lati in forma Norton si presenta:



Il grafo del circuito è (si ricorda che il numero dei lati rimane quello del circuito assegnato in quanto il lato in forma Norton è composto da 2 sub-lati):



La matrice d'incidenza nodi lati è (righe A, B, C) (colonne lati 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8):

$$[A]_{n-1,l} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e la matrice delle conduttanze di lato è:

$$[G_l]_{l,l} = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_8 \end{bmatrix}$$

Per cui

$$[G_{n0}]_{n-1,l} = [A]_{n-1,l} \cdot [G_l]_{l,l} \cdot [A]_{n-1,l}^T$$

diviene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

che restituisce per la matrice delle conduttanze nodali:

$$[G_{n0}]_{n-1, n-1} = \begin{bmatrix} G_1 + G_2 + G_3 + G_8 & -G_2 - G_8 & -G_3 \\ -G_2 - G_8 & G_2 + G_4 + G_5 + G_6 + G_8 & -G_6 \\ -G_3 & -G_6 & G_3 + G_6 \end{bmatrix}$$

Il vettore delle correnti di lato dovute ai generatori in forma Norton vale:

$$[I_{gl}]_{l,1} = \begin{bmatrix} E_1 \cdot G_1 \\ -E_2 G_2 \\ 0 \\ -E_4 G_4 \\ 0 \\ 0 \\ I_7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si noti che nello scrivere il precedente vettore si è anteposto ad ogni valore il segno “+” se il generatore ha polarità concorde con il verso del lato sul grafo orientato; il segno “-” viceversa.

Il vettore delle correnti nodali vale dunque, ricordando che $[I_{n0}] = [A]_{n-1, l} \cdot [I_{gl}]_{l,1}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1 G_1 \\ -E_2 G_2 \\ 0 \\ -E_4 G_4 \\ 0 \\ 0 \\ I_7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

da cui:

$$[I_{n0}] = \begin{bmatrix} E_1 G_1 - E_2 G_2 \\ E_2 G_2 - E_4 G_4 \\ I_7 \end{bmatrix}$$

da cui la soluzione del sistema che offre i potenziali nodali:

$$\begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix} = [G_{no}]_{n-1, n-1}^{-1} \cdot [I_{no}]_{n-1,1}$$

Dopo aver determinato i *potenziali nodali*, procedendo a ritroso, si determinano immediatamente le tensioni di lato semplicemente calcolando:

$$[v_l] = [A]^T \cdot [V_{no}]$$

che per l'esempio in corso di svolgimento è:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix}$$

Procedendo ancora a ritroso, le correnti di lato sono immediatamente determinate applicando l'espressione:

$$[i_l]_{l,1} = [I_{gl}]_{l,1} - [G_l]_{l,l} [v_l]_{l,1}$$

dove compaiono a secondo membro tutte quantità note.

SCRITTURA DEL SISTEMA IN BASE NODI PER SEMPLICE ISPEZIONE

Come si può verificare dalle precedenti relazioni, esistono delle regole che permettono di scrivere il sistema risolvete su base nodi per semplice ispezione (senza ricorrere al grafo orientato).

Infatti si trova che la **Matrice delle Conduttanze Nodali** $[G_{no}]_{n-1, n-1}$, possiede le seguenti proprietà:

1. Indicato con il simbolo $g_{k,j}$, a cui si dà il nome di *transconduttanza*, l'elemento di $[G_{no}]_{n-1, n-1}$ che occupa il posto corrispondente alla riga k (k -mo nodo) e alla colonna j (j -mo nodo) con $j \neq k$, si ha che $g_{k,j} = g_{j,k}$. Quindi la matrice è simmetrica.
2. $g_{k,j}$ è dato dalla somma cambiata di segno di tutte le conduttanze di quei lati collegati tra il k -mo ed il j -mo nodo
3. $g_{k,k}$, detta *autoconduttanza*, è la somma di tutte le conduttanze dei lati che sono collegati al k -mo nodo

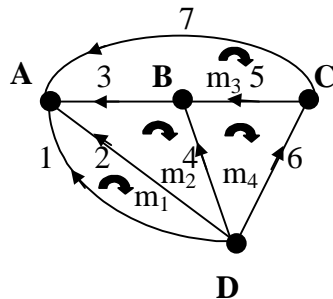
Si trova inoltre che il **Vettore delle Correnti Nodali** $[I_{no}]_{n-1,1}$, possiede la seguenti proprietà:

4. Indicato con il simbolo I_{nok} , l'elemento di $[I_{no}]_{n-1,1}$ relativo alla riga k (k -mo nodo), si trova che esso è pari alla somma algebrica delle intensità di corrente dei lati in *forma Norton* generate dai generatori ideali di corrente di tutti quei lati che si collegano al nodo k . Si anteporrà ad ogni valore della somma algebrica il segno "+" se il generatore del lato ha la freccia rivolta verso il nodo k , il segno "-" sarà anteposto all'intensità di corrente erogata dal generatore che ha verso della freccia uscente dal nodo k .

METODO DELLE MAGLIE

Il metodo dei Maglie sfrutta solo il II PdK.

Consideriamo un circuito il cui grafo orientato sia coincidente con quello in figura (avente $n = 4$ maglie e $l = 7$ lati):



Scriviamo il II PdK relativamente alle m maglie (che non contengono altre maglie internamente al loro percorso) si può rappresentare in forma matriciale tramite la matrice di incidenza maglie-lati:

$$[B] \cdot [v_l] = [0]$$

m,l l,l m,l

Nel caso del grafo in figura si ha, relativamente alle maglie m_1, m_2, m_3, m_4 :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dove si identifica la *matrice di incidenza maglie-lati*.

$$[B]_{m,l} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

in cui le righe rappresentano le maglie, nell'ordine m_1, m_2, m_3, m_4 , mentre le colonne corrispondono ai lati orientati del grafo nell'ordine numerico da 1 a 7. In particolare ogni elemento della matrice d'incidenza maglie-lati (da non confondere con quella di incidenza corde-rami incontrata in precedenza) presenta elementi tali che:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il lato } j \text{ è orientato in modo concorde col verso di rotazione della maglia } i \\ -1 & \text{se il lato } j \text{ non è orientato in modo concorde col verso di rotazione della maglia } i \\ 0 & \text{se il lato } j \text{ non fa parte del percorso della maglia } i \end{cases}$$

Introduciamo ora una nuova variabile: la **corrente di maglia**. Per *corrente di maglia* si intende la corrente fittizia che circola nel percorso di maglia. La differenza tra due correnti di maglia restituisce l'intensità di corrente di ciascun lato che separa le due maglie in oggetto. Se il lato d'interesse non confina con altre maglie allora la corrente di lato sarà pari a \pm la corrente di maglia. Rispettivamente, il segno "+" se il verso del lato è concorde con il verso di maglia, il segno "-" viceversa.

Allora, in riferimento al solito grafo di esempio, si possono scrivere le correnti di maglia adoperando il simbolo I a cui assoceremo un pedice con lettera coincidente col nome della maglia in esame. Così, I_{m_1} è la corrente di maglia m_1 , I_{m_2} quella di maglia m_2 e così via.

Scriviamo dunque le relazioni che ci indichino, rispetto al grafo dell'esempio, il valore delle correnti di lato in funzione delle correnti di maglia:

$$\begin{cases} i_1 = I_{m_1} \\ i_2 = I_{m_2} - I_{m_1} \\ i_3 = I_{m_3} - I_{m_2} \\ i_4 = I_{m_4} - I_{m_2} \\ i_5 = I_{m_3} - I_{m_4} \\ i_6 = -I_{m_4} \\ i_7 = -I_{m_3} \end{cases}$$

Questo sistema, nelle incognite V_A , V_B e V_C può essere posto in forma matriciale:

$$[i_l] = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{m_1} \\ I_{m_2} \\ I_{m_3} \\ I_{m_4} \end{bmatrix}$$

In forma più generale:

$$[i_l]_{l,1} = [H]_{l,m} \cdot [I_m]_{m,1}$$

con $[v_l]$ indichiamo il vettore colonna delle tensioni di lato e con $[I_m]_{m,1}$ il vettore dei potenziali nodali.

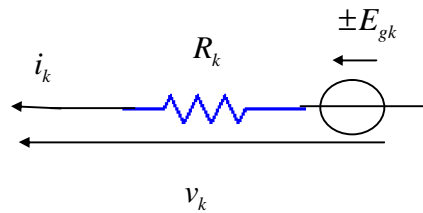
Si nota che esiste una relazione tra la *matrice d'incidenza nodi-lati* $[B]$ e la matrice $[H]$:

$$[H] = [B]^T$$

Dunque possiamo scrivere:

$$\begin{cases} [B] \cdot [v_l] = [0] \\ [B]^T \cdot [I_m] = [i_l] \end{cases} \quad (^\circ)$$

Per la risoluzione delle reti attraverso il metodo dei maglie useremo, come incognite, le *correnti di maglia*. Per applicare questo metodo di risoluzione bisogna allora rappresentare tutti i lati rami in cui agiscono bipoli attivi nel loro equivalente Thevenin. Ciò è dovuto al fatto che adoperiamo il solo II PdK che controlla solo la somma delle tensioni.



La legge costitutiva del lato, con i versi assegnati in figura si ottiene imponendo il II PdK:

$$v_k = \pm E_{gk} - R_k i_k.$$

Casi particolari di tale forma sono:

1) lato formato dal solo generatore di tensione. Ciò equivale a dire che la resistenza di lato $R_k = 0$.

2) lato formato da sola resistenza, che equivale a porre che $E_{gk} = 0$.

Non sono compatibili con il metodo i lati che presentano soltanto generatori di corrente senza avere elementi passivi in parallelo (lati non trasformabili in forma Thevenin).

In forma matriciale, la legge costitutiva diviene:

$$[v_l] = [E_{gl}] - [R_l][i_l] \quad (^\circ)$$

La matrice $[R_l]$ che è quadrata è una matrice diagonale, ha tutti gli elementi nulli a meno quelli della diagonale principale dove compaiono i valori delle conduttanze di lato. Ovviamente si ha uno zero sulla diagonale principale solo se manca il sub-lato passivo secondo lo schema Thevenin, in quel lato.

Il significato dei vettori colonna è chiaro, alla luce di quanto finora detto.

Inseriamo le $(^\circ)$ nella prima delle $(^\circ)$. Si ha:

$$[B]_{m,l} \cdot \left\{ [E_{gl}]_{l,1} - [R_l]_{l,l} [I_m]_{l,1} \right\} = 0$$

Definiamo il vettore colonna delle **tensioni di maglia**:

$$[E_m] = [B]_{m,l} \cdot [E_{gl}]_{l,1}$$

che costituisce il *vettore dei termini noti* del sistema risolvibile

adoperiamo ora la seconda delle $(^\circ)$ $[i_l] = [B]^T [I_m]$ ottenendo:

$$[E_m] = [B] \cdot [R_l] \cdot [B]^T \cdot [I_m]$$

ed infine

$$[E_m] = [R_m] \cdot [I_m]$$

che è la formulazione matriciale del Metodo dei Maglie.

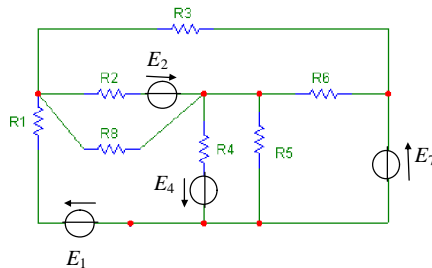
La matrice quadrata

$$[R_m]_{m,l} = [B]_{m,l} \cdot [R_l]_{l,l} \cdot [B]^T_{m,l}$$

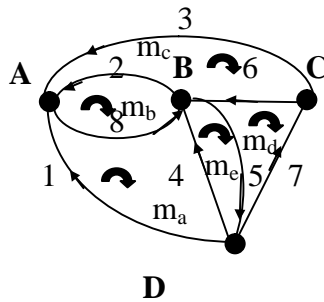
è detta matrice delle **resistenze di maglia** e costituisce la matrice dei coefficienti del sistema algebrico.

Esempio Applicativo:

Del circuito in figura si determinino le correnti e le tensioni di ciascun lato applicando il metodo dei maglie.



Il grafo del circuito è, dopo aver verificato che tutti i lati sono esprimibili in forma Thevenin:



La matrice d'incidenza maglie lati è (righe m_a m_b m_c m_d m_e) (colonne lati 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8):

$$[B]_{m,l} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e la matrice delle resistenze di lato è:

$$[R_l]_{l,l} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_8 \end{bmatrix}$$

Per cui

$$[R_m]_{m,l} = [B]_{m,l} \cdot [R_l]_{l,l} \cdot [B]^T_{m,l}$$

che a conti fatti vale:

$$[R_m]_{m,m} = \begin{pmatrix} R_1 + R_4 + R_8 & -R_8 & 0 & 0 & -R_4 \\ -R_8 & R_8 + R_2 & -R_2 & 0 & 0 \\ 0 & -R_2 & R_2 + R_3 + R_6 & -R_6 & 0 \\ 0 & 0 & -R_6 & R_5 + R_6 & -R_5 \\ -R_4 & 0 & 0 & -R_5 & R_5 + R_4 \end{pmatrix}$$

Il vettore delle tensioni di lato dovute ai generatori in forma Norton vale:

$$[E_{gl}]_{l,1} = \begin{bmatrix} E_1 \\ -E_2 \\ 0 \\ -E_4 \\ 0 \\ 0 \\ -E_7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si noti che nello scrivere il precedente vettore si è anteposto ad ogni valore il segno “+” se il generatore ha polarità concorde con il verso del lato sul grafo orientato; il segno “-” viceversa.

Il vettore delle tensioni di maglia vale dunque, ricordando che $[E_m] = [B]_{m,l} \cdot [E_{gl}]_{l,1}$:

$$[E_m] = \begin{pmatrix} E_1 + E_4 \\ E_2 \\ -E_2 \\ E_7 \\ -E_4 \end{pmatrix}$$

da cui la soluzione del sistema che offre i potenziali nodali:

$$\begin{bmatrix} I_{ma} \\ I_{mb} \\ I_{mc} \\ I_{md} \\ I_{me} \end{bmatrix} = [R_m]_{m,m}^{-1} \cdot [E_m]_{m,1}$$

Dopo aver determinato le *correnti di maglia*, procedendo a ritroso, si determinano immediatamente le correnti di lato semplicemente calcolando:

$$[i_l] = [B]^T \cdot [I_m]$$

Quindi, procedendo ancora a ritroso, le tensioni di lato sono immediatamente determinate applicando l'espressione:

$$[v_l] = [E_{gl}] - [R_l][i_l]$$

E' evidente che nelle ultime due espressioni compaiono a secondo membro tutte quantità note, per cui il calcolo è immediato.

SCRITTURA DEL SISTEMA IN BASE MAGLIE PER SEMPLICE ISPEZIONE

Come si può verificare dalle precedenti relazioni, esistono delle regole che permettono di scrivere il sistema risolvete su base maglie per semplice ispezione (senza ricorrere al grafo orientato).

Infatti si trova che la **Matrice delle Resistenze di maglia** $[R_m]_{m,m}$, possiede le seguenti proprietà:

1. Indicato con il simbolo $r_{k,j}$, a cui si dà il nome di *transresistenza*, l'elemento di $[R_m]_{m,m}$ che occupa il posto corrispondente alla riga k (k -ma maglia) e alla colonna j (j -ma maglia) con $j \neq k$, si ha che $r_{k,j} = r_{j,k}$. Quindi la matrice è simmetrica.
2. $r_{k,j}$ è dato dalla somma cambiata di segno di tutte le resistenze di quei lati collegati tra il k -mo ed il j -mo nodo (attenzione: bisogna assumere per tutte le maglie lo stesso verso orario o antiorario)
3. $r_{k,k}$, detta *autoresistenza*, è la somma di tutte le resistenze dei lati che fanno parte del percorso della k -ma maglia

Si trova inoltre che il **Vettore delle Tensioni di Maglia** $[E_m]_{m,1}$, possiede la seguenti proprietà:

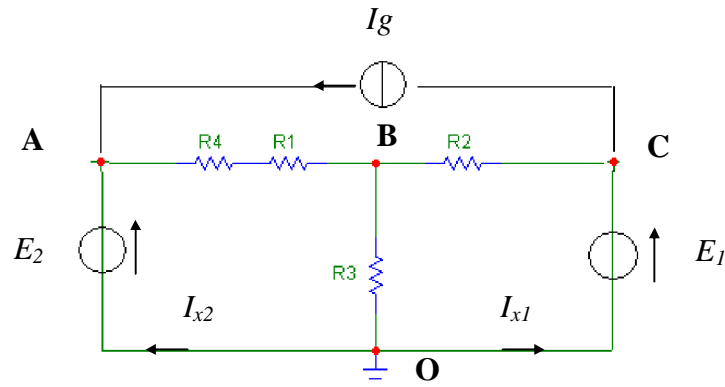
4. Indicato con il simbolo E_{mk} , l'elemento di $[E_m]_{m,1}$ relativo alla riga k (k -ma maglia), si trova che esso è pari alla somma algebrica delle *fem* dei lati in generate dai generatori ideali di tensione di tutti quei lati che fanno parte del percorso della k -ma maglia. Si anteporrà ad ogni valore della somma algebrica il segno "+" se il generatore del lato ha la freccia rivolta concordemente col verso della maglia k , il segno "-" sarà anteposto alla fem erogata dal generatore che ha verso della freccia discorde con quello della maglia k .

GENERALIZZAZIONE DEI METODI

Metodo dei Nodi Generalizzato

Quando esistono uno o più lati non trasformabili *Norton*, la *ddp* tra i due nodi dove è inserito il lato in questione è nota e pari alla *fem* del generatore ideale di tensione. Ci troviamo dunque di fronte ad un caso in cui siamo costretti a scrivere oltre alle $n-1$ equazioni del I PdK, anche altre p equazioni, che chiameremo di vincolo, dovute alla presenza di eventuali p lati non trasformabili *Norton*. Se si vuole continuare ad applicare il metodo dei nodi, si potrà tenere conto dell'aggiunta di p equazioni introducendo altre p incognite. Queste p incognite saranno le p correnti erogate dai generatori di *fem* nei lati non trasformabili *Norton*. Il sistema avrebbe così $n-1+p$ equazioni in $n-1+p$ incognite.

Facciamo un esempio:



Il sistema risolvete su base nodi scritto per semplice ispezione è:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_4 + R_1} & -\frac{1}{R_4 + R_1} & 0 \\ -\frac{1}{R_4 + R_1} & \frac{1}{R_4 + R_1} + G_2 + G_3 & -G_2 \\ 0 & -G_2 & G_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_g + I_{x2} \\ 0 \\ -I_g + I_{x1} \end{bmatrix}$$

alle quali si aggiungono le equazioni di vincolo:

$$V_A = E_2$$

$$V_C = E_1$$

Inserendo le equazioni di vincolo nel sistema risolvete su base nodi si ha, infine:

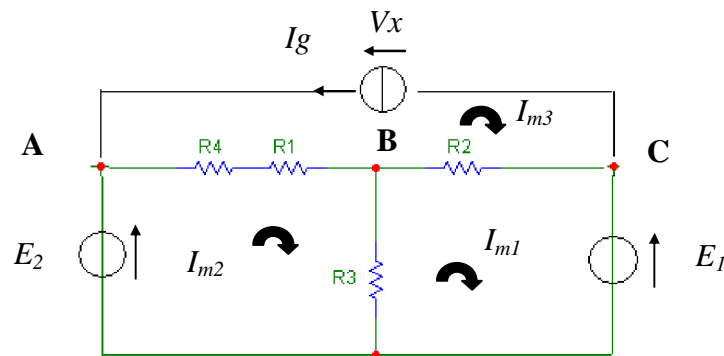
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_4 + R_1} & -\frac{1}{R_4 + R_1} & 0 \\ -\frac{1}{R_4 + R_1} & \frac{1}{R_4 + R_1} + G_2 + G_3 & -G_2 \\ 0 & -G_2 & G_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_2 \\ V_B \\ E_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_g + I_{x2} \\ 0 \\ -I_g + I_{x1} \end{bmatrix} \text{ da cui:}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{R_4 + R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_4 + R_1} + G_2 + G_3 & 0 \\ 0 & -G_2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{x2} \\ V_B \\ I_{x1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_g - \frac{E_2}{R_4 + R_1} \\ \frac{E_2}{R_4 + R_1} + E_1 G_2 \\ -I_g - E_1 G_2 \end{bmatrix}$$

nelle 3 incognite ibride I_{x1}, I_{x2}, V_B

Metodo delle Maglie Generalizzato

Quando esiste un lato non trasformabili *Thevenin*, la corrente di quel lato è nota a priori e pari alla corrente impressa dal generatore ideale di corrente. Sarà nota dunque la differenza tra due correnti di maglia. Ci troviamo dunque di fronte ad un caso in cui siamo costretti a scrivere oltre alle m equazioni del II PdK, anche altre q equazioni, che chiameremo di vincolo, dovute alla presenza di q lati non-trasformabili *Thevenin*. Se si vuole continuare ad applicare il metodo dei nodi, si potrà tenere conto dell'aggiunta di q equazioni introducendo altre q incognite. Queste q incognite saranno le q tensioni erogate dai generatori di corrente nei lati non trasformabili *Thevenin*. Il sistema avrebbe così $m+q$ equazioni in $m+q$ incognite. Facciamo un esempio:



Il sistema risolvibile su base maglie scritto per semplice ispezione è:

$$\begin{bmatrix} R_2 + R_3 & -R_3 & -R_2 \\ -R_3 & R_4 + R_1 + R_3 & -(R_4 + R_1) \\ -R_2 & -(R_4 + R_1) & R_4 + R_1 + R_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \\ I_{m3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E_1 \\ E_2 \\ -V_x \end{bmatrix}$$

a cui si aggiunge l'equazione di vincolo

$$I_{m3} = -I_g$$

Inserendo le equazioni di vincolo nel sistema risolvibile su base maglie si ha, infine:

$$\begin{bmatrix} R_2 + R_3 & -R_3 & -R_2 \\ -R_3 & R_4 + R_1 + R_3 & -(R_4 + R_1) \\ -R_2 & -(R_4 + R_1) & R_4 + R_1 + R_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \\ -I_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E_1 \\ E_2 \\ -V_x \end{bmatrix}$$

da cui:

$$\begin{bmatrix} R_2 + R_3 & -R_3 & 0 \\ -R_3 & R_4 + R_1 + R_3 & 0 \\ -R_2 & -(R_4 + R_1) & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \\ V_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E_1 - R_2 I_g \\ E_2 - (R_4 + R_1) I_g \\ +(R_4 + R_1 + R_2) I_g \end{bmatrix}$$

nelle 3 incognite ibride I_{m1}, I_{m2}, V_x

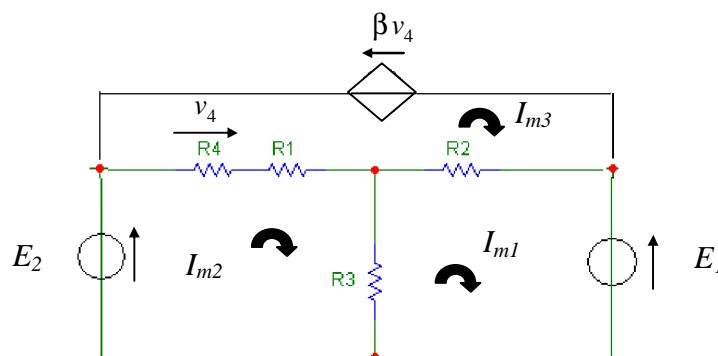
METODO DEI NODI E METODO DELLE MAGLIE IN PRESENZA DI GENERATORI CONTROLLATI

Se nel circuito sono presenti generatori controllati occorre seguire i seguenti passi:

- 1) scrivere il sistema risolvete su basi nodi, oppure su base maglie, in modo canonico
- 2) trattare i generatori controllati come fossero indipendenti, nella prima scrittura del vettore dei termini noti e cioè il vettore delle correnti nodali per il metodo dei nodi, oppure il vettore delle tensioni di maglia per il metodo delle maglie
- 3) scrivere le espressioni, che chiameremo vincoli, che legano le grandezze pilota (tensioni e/o correnti) del generatore controllato alle incognite del metodo scelto, cioè i potenziali nodali o le correnti di maglia.
- 4) Riordinare il sistema e quindi risolvere. La matrice dei coefficienti (delle conduttanze o delle resistenze di maglia) perderà la simmetria.

Esempio 1:

Sia assegnato il circuito in figura in cui compare un generatore di tensione controllato in tensione.



Il sistema risolvete su base maglie è (scritto per semplice ispezione):

$$\begin{bmatrix} R_2 + R_3 & -R_3 & -R_2 \\ -R_3 & R_4 + R_1 + R_3 & -(R_4 + R_1) \\ -R_2 & -(R_4 + R_1) & R_4 + R_1 + R_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \\ I_{m3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E_1 \\ E_2 \\ -\beta v_4 \end{bmatrix}$$

con il vincolo del pilota:

$$v_4 = R_4 (I_{m3} - I_{m2})$$

Inserendo le equazioni di vincolo nel sistema risolvete su base maglie si ha, infine:

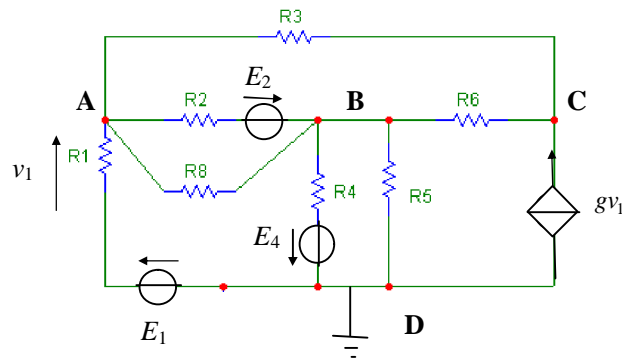
$$\begin{bmatrix} R_2 + R_3 & -R_3 & -R_2 \\ -R_3 & R_4 + R_1 + R_3 & -(R_4 + R_1) \\ -R_2 & -(R_4 + R_1) & R_4 + R_1 + R_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \\ I_{m3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E_1 \\ E_2 \\ -\beta R_4 (I_{m3} - I_{m2}) \end{bmatrix}$$

da cui si ottiene il sistema risolvete finale nelle tre incognite *correnti di maglia*:

$$\begin{bmatrix} R_2 + R_3 & -R_3 & -R_2 \\ -R_3 & R_4 + R_1 + R_3 & -(R_4 + R_1) \\ -R_2 & -(R_4 + R_1) - \beta R_4 & R_4 + R_1 + R_2 + \beta R_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \\ I_{m3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E_1 \\ E_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esempio 2:

Sia assegnato il circuito in figura in cui compare un generatore di corrente controllato in tensione.



$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 + G_3 + G_8 & -G_2 - G_8 & -G_3 \\ -G_2 - G_8 & G_2 + G_4 + G_5 + G_6 + G_8 & -G_6 \\ -G_3 & -G_6 & G_3 + G_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 G_1 - E_2 G_2 \\ -E_4 G_4 \\ g v_1 \end{bmatrix}$$

a cui si aggiunge l'equazione di vincolo del pilota

$$v_1 = V_A - E_1$$

inserendo l'equazione di vincolo nel sistema, questo diviene:

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 + G_3 + G_8 & -G_2 - G_8 & -G_3 \\ -G_2 - G_8 & G_2 + G_4 + G_5 + G_6 + G_8 & -G_6 \\ -G_3 & -G_6 & G_3 + G_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 G_1 - E_2 G_2 \\ -E_4 G_4 \\ g(V_A - E_1) \end{bmatrix}$$

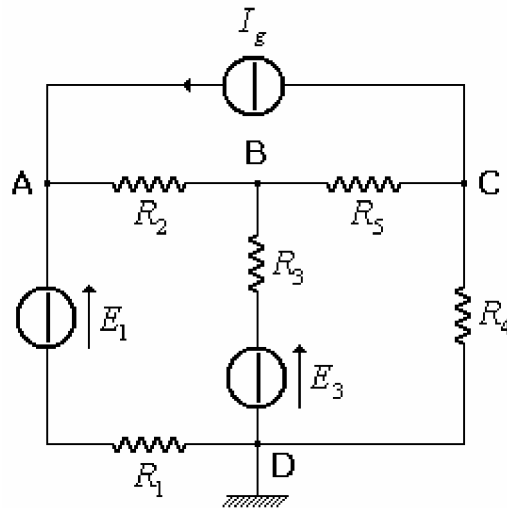
ed infine

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 + G_3 + G_8 & -G_2 - G_8 & -G_3 \\ -G_2 - G_8 & G_2 + G_4 + G_5 + G_6 + G_8 & -G_6 \\ -G_3 - g & -G_6 & G_3 + G_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 G_1 - E_2 G_2 \\ -E_4 G_4 \\ -g E_1 \end{bmatrix}$$

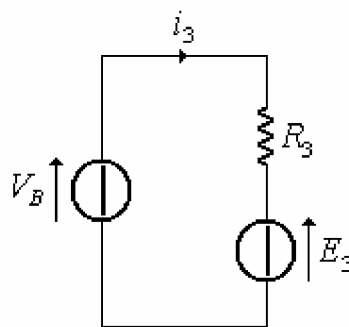
PRINCIPIO DI SOSTITUZIONE

Il principio di sostituzione, che è già stato implicitamente applicato in precedenza, afferma che dopo aver determinato la tensione o la corrente agente su un lato (o un intero aggregato di lati accessibile da due morsetti), si può *sostituire* all'intera rete esterna che è collegata ai morsetti del lato in oggetto (o dell'aggregato) un generatore ideale di tensione (o di corrente) di valore pari alla tensione (o corrente) già calcolata tra i morsetti del lato in questione. Ad esempio il principio di sostituzione può permettere di focalizzare l'analisi del circuito soltanto sulle grandezze del lato che ci interessa. Ad ulteriore esempio, dopo aver trovato i *potenziali nodali* (o le *correnti di maglia*) relativi ad un generico circuito, per ricavare la corrente su un certo lato oppure la tensione su un particolare bipolo, basta sostituire all'intera rete esterna un generatore indipendente di tensione (o di corrente) tra i morsetti del lato.

Consideriamo allora il seguente circuito:



se il nostro obiettivo è calcolare la corrente sulla resistenza R_3 , una volta ricavato il potenziale nodale V_B , utilizzando il principio di sostituzione possiamo considerare tale potenziale come un generatore indipendente ideale di tensione erogante una tensione pari proprio al potenziale nodale calcolato:



$$R_3 i_3 = V_B - E_3$$

$$i_3 = \frac{V_B - E_3}{R_3}$$

Se avessimo utilizzato il metodo delle maglie, al posto del generatore indipendente di tensione avremmo sostituito quello di corrente.

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

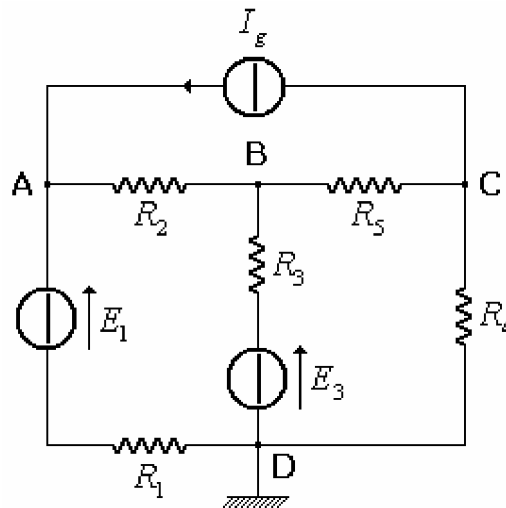
Il principio di sovrapposizione degli effetti (PSE) permette di sfruttare la caratteristica di linearità di un sistema al fine di ottenerne tutte le relative incognite come somma degli effetti delle cause che le generano, prese singolarmente (o a sottogruppi).

Nel caso di circuiti costituiti da bipoli o multipoli *lineari* dunque, il PSE può essere enunciato nel seguente modo:

Qualsiasi corrente o tensione di lato può ottenersi come somma *algebraica* rispettivamente delle correnti o delle tensioni calcolate considerando agente un solo generatore indipendente alla volta. Quando si dice che agisce un solo generatore (o un sottogruppo di generatori) si intende che tutti gli altri generatori (o i restanti sottogruppi) siano stati spenti. Quando si spengono i generatori

ideali indipendenti di corrente i lati dove essi agiscono vengono ad equivalere a lati aperti (circuito aperto), infatti spegnere un generatore di corrente equivale a porre la sua $I_g = 0$. Quando si spengono i generatori ideali indipendenti di tensione, la coppia di morsetti tra i quali essi agiscono viene ad equivalere ad un cortocircuito, infatti spegnere un generatore di tensione equivale a porre la sua $E = 0$.

Per dare un esempio di quanto affermato consideriamo il seguente circuito:



Utilizzando il metodo dei potenziali nodali si ha:

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 & 0 \\ -G_2 & G_2 + G_3 + G_5 & -G_5 \\ 0 & -G_5 & G_4 + G_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 E_1 + I_g \\ G_3 E_3 \\ -I_g \end{bmatrix}$$

Osservando che:

$$\begin{bmatrix} G_1 E_1 + I_g \\ G_3 E_3 \\ -I_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 E_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_g \\ 0 \\ -I_g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G_3 E_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

la soluzione del sistema può essere espressa nel seguente modo:

$$\begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix}_{Tot} = \begin{bmatrix} V_{A_1} \\ V_{B_1} \\ V_{C_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{A_2} \\ V_{B_2} \\ V_{C_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{A_3} \\ V_{B_3} \\ V_{C_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{A_1} + V_{A_2} + V_{A_3} \\ V_{B_1} + V_{B_2} + V_{B_3} \\ V_{C_1} + V_{C_2} + V_{C_3} \end{bmatrix}$$

dove i vettori $[V_{A_k}]$, $[V_{B_k}]$, $[V_{C_k}]$ per $k = 1, 2, 3$ sono le soluzioni dei tre sistemi ottenuti considerando i vettori 1, 2 e 3 delle correnti nodali, singolarmente.

Tradotto in termini circuitali ciò è perfettamente in accordo con quanto affermato nel PSE.

NB: si faccia attenzione al caso del calcolo della potenza. Essa infatti non può ottenersi dalla somma delle potenze dovute ai singoli effetti in quanto l'espressione che la rappresenta, ossia $v \cdot i$, fa cadere il vincolo di linearità.

Ovviamente il PSE può essere applicato anche considerando agenti contemporaneamente un sottogruppo di cause alla volta e non soltanto una causa alla volta. Quindi, riferendoci all'esempio precedente, avremmo potuto considerare solo 2 sottogruppi di cause dovute: un sottogruppo relativo all'azione dei soli generatori di tensione e l'altro alla sola applicazione del generatore di corrente.

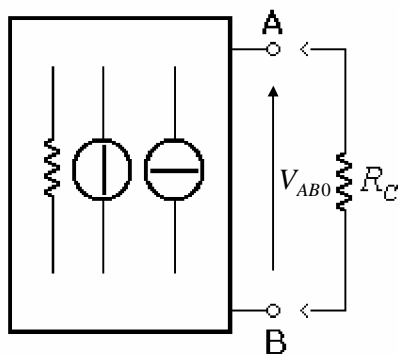
TEOREMA DI THEVENIN

Il teorema di Thevenin afferma che:

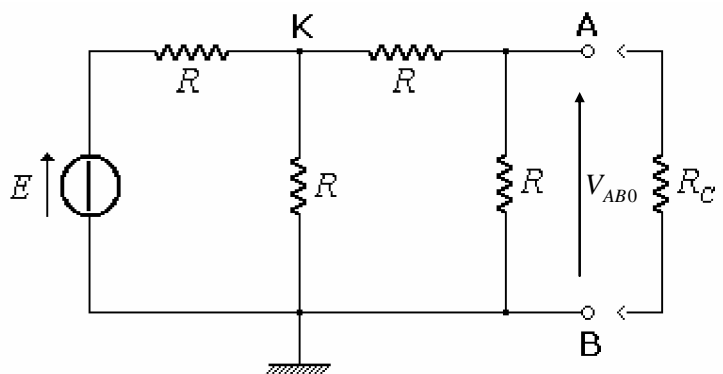
Una qualsiasi rete elettrica lineare comunque complessa considerata tra due suoi qualsiasi punti, si comporta, verso l'esterno, e tra quegli stessi punti, come un unico lato composto dalla serie tra un generatore indipendente ideale di tensione ed una resistenza. Il generatore ideale eroga una tensione di intensità e polarità pari alla tensione misurata *a vuoto* tra i due punti in questione, mentre la resistenza è ottenuta calcolando la resistenza equivalente vista dagli stessi punti dopo che la rete sia stata resa passiva mediante lo spegnimento di tutti i generatori indipendenti in essa contenuti.

Per dimostrare il teorema accompagniamo la dimostrazione generale con un esempio chiarificatore.

In figura è riportata a sinistra una generica rete comunque complessa, mentre a destra viene riportato un possibile esempio applicativo.



Rete generica



Esempio

Per quanto riguarda l'esempio, utilizziamo il metodo dei potenziali nodali per calcolare la tensione che chiameremo V_{AB0} (il pedice 0 sta ad indicare che la tensione viene ricavata senza applicare i due punti a nessun carico o altro circuito: cioè siamo a vuoto), tra i punti A e B:

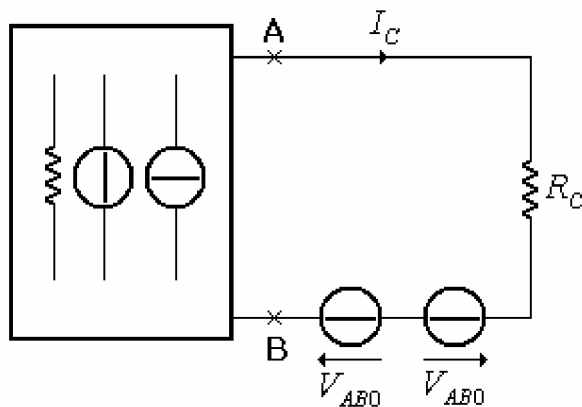
$$\left(2G + \frac{G}{2}\right)V_K = GE \rightarrow V_K = \frac{2}{5}E$$

Una volta determinato il valore dell'unico potenziale nodale V_K (infatti i nodi sono 2) con il principio di sostituzione ricaviamo il valore di V_{AB0}

$$V_{AB0} = \frac{1}{5}E$$

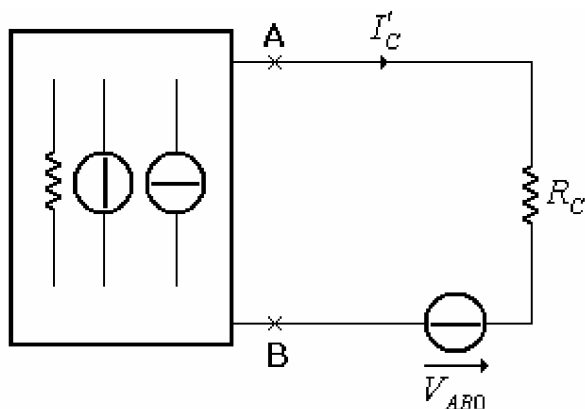
Ora se applichiamo una resistenza qualsiasi R_C tra i punti A e B possiamo calcolare la nuova ddp tra i punti A e B, che in questo caso chiameremo semplicemente V_{AB} .

Tornando al caso generale, possiamo riferirci allo schema in figura in cui in serie alla resistenza esterna R_C sono stati inseriti due generatori ideali di tensione, di uguale valore V_{AB0} , in serie tra loro ma con polarità opposte.

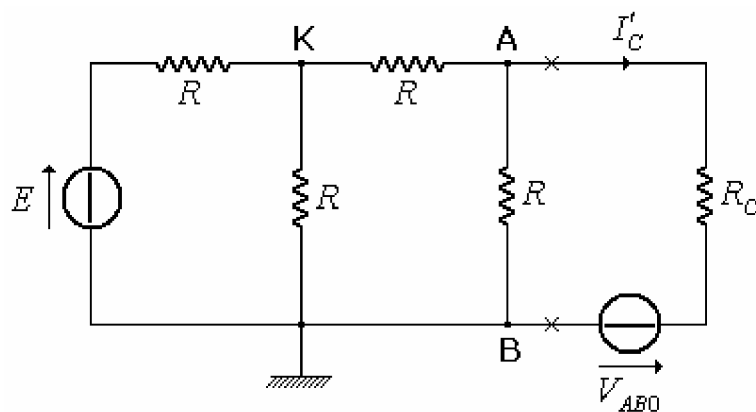


Naturalmente l'aggiunta dei due bipoli attivi non produce alcuna alterazione nel circuito, visto che la tensione risultante ai capi della loro serie è nulla e che, per la definizione di generatore ideale di tensione, la corrente che li attraversa non è vincolata.

Utilizzando il PSE, calcoliamo l'effetto prodotto dall'azione di tutti i generatori interni alla rete con l'aggiunta del solo generatore di destra. Cioè abbiamo spento solo il generatore di tensione esterno che ha la freccia della polarità rivolta verso il punto B:



La situazione generale equivale, per quanto riguarda l'esempio al caso riprodotto nella seguente figura:



Sempre riferendoci all'esempio, il metodo dei nodi ci permette di calcolare:

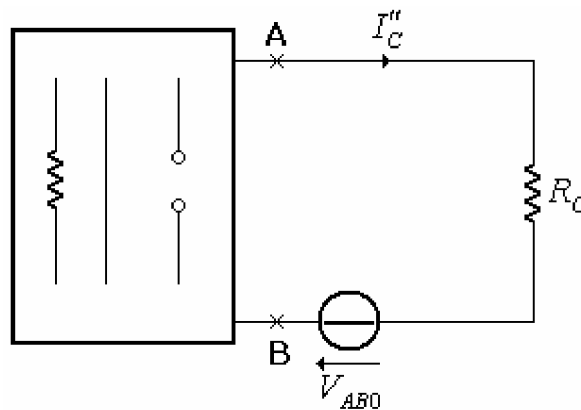
$$\begin{bmatrix} 3G & -G \\ -G & 2G + G_C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_K \\ V_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} GE \\ V_{AB0} G_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} GE \\ \frac{E}{5} G_C \end{bmatrix}$$

Con la regola di Cramer calcoliamo il potenziale V_A che risulta essere:

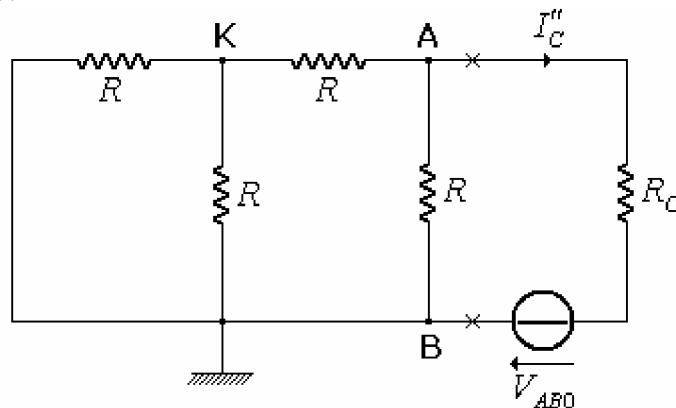
$$V_A = \frac{E}{5} = V_{AB0}$$

Sfruttando il principio di sostituzione se ne deduce immediatamente che la corrente $I'_C = \frac{V_A - V_B}{R_C}$ è identicamente nulla. Tale risultato particolare, può essere ovviamente generalizzato ad una rete generica qualunque.

Dobbiamo ora considerare, in ottemperanza al PSE, l'effetto prodotto dalla causa che precedentemente avevamo spento: il generatore di tensione che ha la polarità rivolta verso il punto B sia ora acceso mentre tutti gli altri generatori presenti siano spenti:



Per l'esempio avremo:

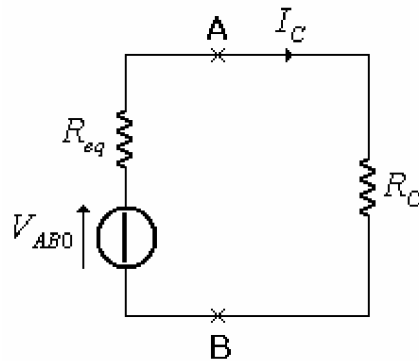


Riferendoci ancora all'esempio, tra i punti A e B è chiaramente possibile ricavare una resistenza equivalente R_{eq} della rete in esame *resa passiva al suo interno*.

In questo caso la R_{eq} vale:

$$R_{eq} = \frac{3}{5} R$$

Per la resistenza esterna R_C tutto allora è come se essa fosse collegata nel modo riportato in figura:



A questo punto sommando tutti gli effetti ci accorgiamo che:

$$I_C = I'_C + I''_C = I''_C$$

Dunque se la corrente che scorre sulla resistenza R_C è uguale a quella che circola nel circuito appena analizzato, se ne deduce che il bipolo costituito dalla serie del generatore di tensione V_{AB0} con la resistenza R_{eq} rappresenta lo schema equivalente del circuito iniziale visto tra i punti A e B.

Ovviamente questa conclusione relativa all'esempio è generalizzabile ad una qualunque generica rete vista tra due suoi punti ed il teorema di Thevenin risulta dimostrato.

Nota sul calcolo della resistenza equivalente della rete resa passiva per mezzo di un generatore arbitrario esterno

In molti casi il calcolo della resistenza equivalente, attraverso trasformazioni serie, parallelo, triangolo-stella, può risultare difficoltoso a causa delle complesse connessioni tra i lati che si possono osservare.

Per superare tale problema si può sempre ricorrere all'applicazione di uno dei due metodi generali. Si dovrà allora applicare tra i punti A e B di interesse, del circuito reso passivo al suo interno, un generatore ideale di corrente (o di tensione) di valore arbitrario e noto, ad esempio $I_g = 1 \text{ A}$ (o $V_g = 1 \text{ V}$).

In questo modo, dopo aver ricavato la ddp (o la corrente) V_{AB} (o I_{AB}) utilizzando i normali metodi di analisi visti in precedenza, la resistenza equivalente potrà essere ricavata semplicemente dividendo la tensione agente tra A e B con la corrente circolante tra A e B:

$$R_{eq} = \frac{V_{AB}}{I_g} \quad (\text{o } R_{eq} = \frac{V_g}{I_{AB}})$$

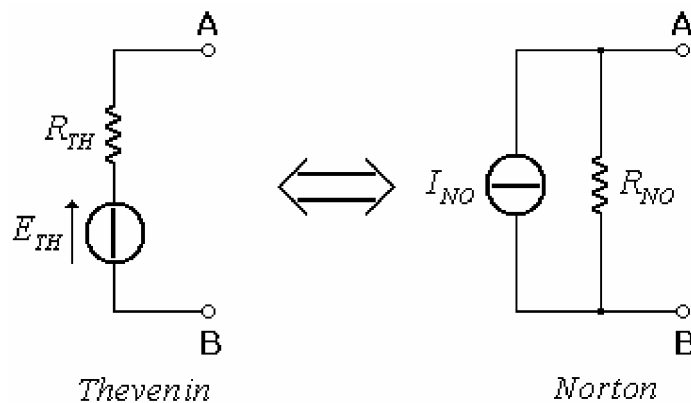
Presenza di generatori controllati interni alla rete

Occorre fare attenzione ai casi in cui, all'interno del circuito del quale si intende dare la rappresentazione tra due suoi punti in conformità con il teorema di Thevenin, compaiono dei generatori controllati. Si ricordi infatti che tali generatori sono pilotati da correnti e/o da tensioni presenti su altri lati o altri bipoli dello circuito. Quindi durante la passivizzazione della rete per il calcolo della resistenza equivalente, lo spegnere un generatore dipendente non ha senso ed è sbagliato.

Tali generatori controllati, nell'applicazione del teorema di Thevenin, non devono mai essere spenti. L'unico modo per calcolare la resistenza equivalente della rete resa passiva è allora quello di alimentare i punti A e B con un generatore fittizio e noto, con le modalità precedentemente illustrate.

DUALITÀ THEVENIN – NORTON

Come nei casi precedenti anche al teorema di Thevenin può essere associato il concetto di dualità: il suo duale infatti è il teorema di Norton di cui non daremo dimostrazione ma sfrutteremo semplicemente per esso la sua dualità con Thevenin.



Le relazioni che legano i due circuiti equivalenti sono semplicemente:

$$I_{NO} = \frac{E_{TH}}{R_{TH}} \qquad R_{NO} = R_{TH}$$

Il significato del teorema di Norton è il seguente Un qualsiasi circuito lineare e comunque complesso visto tra due suoi arbitrari punti, si comporta come un bipolo rappresentabile come parallelo di un generatore ideale di corrente con una resistenza. Il generatore ideale è uguale alla corrente di *cortocircuito* calcolata (o misurata) tra i due punti, mentre la resistenza è ottenuta calcolando la resistenza equivalente della rete resa passiva, spegnendo i generatori indipendenti, vista dagli stessi punti.

Tutti gli argomenti non contenuti in questi brevi appunti introduttivi si trovano sui libri di testo consigliati a lezione.

Il programma del corso di Teoria dei Circuiti è di seguito riportato con evidenziati in giallo gli argomenti trattati in precedenza, in grigio quelli da studiare sul libro di testo:

Programma di

Teoria dei Circuiti (già Elettrotecnica)

Dai campi ai circuiti: limiti e validità della rappresentazione circuitale. Leggi di Kirkhhoff. Caratteristiche topologiche dei circuiti. Collegamenti in serie e in parallelo, nodi e maglie. Introduzione alla teoria dei grafi. Tagli e maglie fondamentali. Matrici di incidenza. Convenzioni dei generatori e degli utilizzatori. Potenza elettrica e passività. Teorema di Tellegen. Reciprocità. Bipolo, multipolo, porta e multiporta. Linearità, tempo-invarianza, memoria. Leggi costitutive dei bipoli passivi R L C e dei generatori ideali di tensione e di corrente. Dualità. Generatori controllati, mutue induttanze, giratore, trasformatore ideale e nullo. Analisi di reti senza memoria: metodi generali dei nodi e delle maglie, trasformazioni topologiche equivalenti e teorema di Thevenin. Teorema del massimo trasferimento di potenza. Interruttori ideali. Trasformata di Laplace per la risoluzione dei circuiti lineari con memoria. Impedenza, ammettenza e funzioni di rete nel dominio di Laplace. Metodi di antitrasformazione delle funzioni razionali fratte. Estensione al dominio di Laplace dei metodi per la risoluzione dei circuiti. Risposta transitoria e permanente. Risposta libera e forzata. Stabilità nei circuiti. Analisi di regimi permanenti. Circuiti in continua. Regime sinusoidale. Metodo dei Fasori. Impedenza, ammettenza e funzioni di rete nel dominio della frequenza. Potenza attiva, reattiva e complessa. Confronto tra dominio di Laplace e dominio della frequenza. Circuiti risonanti. Cenni sul Regime armonico e Serie di Fourier. Proprietà filtranti dei circuiti passivi e attivi ideali. Principali rappresentazioni dei due-porte bilanciati e sbilanciati. Interconnessione di due-porte.