APPUNTI INTEGRATIVI Provvisori circa:

Risposta in Frequenza: Introduzione ai Filtri Passivi e Attivi

Filtri del I ordine

1. Passa-Basso

Consideriamo la funzione di rete: *Trasferimento in tensione* ai capi di un condensatore ideale di capacità C posto in serie ad un resistore ideale di resistenza R:

$$H(s) = \frac{V_C(s)}{E(s)} = \frac{1}{sC}\frac{1}{R+\frac{1}{sC}} = \frac{1}{RC(s+\frac{1}{RC})} \tag{1}$$

la corrispondente risposta in frequenza si ottiene sostituendo alla variabile s della funzione di rete, la quantità immaginaria $j\omega$ (dove, come noto $\omega = 2\pi f$ è la pulsazione [radianti/secondo] e f è la frequenza [Hz]).
Si avrà dalla (1):

$$H(j\omega) = \frac{1}{RC(j\omega+\frac{1}{RC})} \tag{2}$$

La funzione di rete è, per la (2) un numero complesso funzione della pulsazione che può espresso in forma euleriana:

$$H(j\omega) = H(\omega)e^{\varphi(\omega)} \tag{3}$$

dove la funzione:

$$H(\omega) = \frac{1}{RC\sqrt{\omega^2+\left(\frac{1}{RC}\right)^2}} \tag{4}$$

rappresenta il modulo della funzione di rete, mentre

$$\varphi(\omega) = arctg(-\omega RC) \tag{5}$$

ne rappresenta l'argomento, cioè la fase.

Si definisce pulsazione di taglio quel particolare valore della pulsazione, che indicheremo con ω_t, tale che:

$$H(\omega_t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0.707 \tag{6}$$

Si ottiene allora, in virtù della (4):

$$\begin{gathered} H(\omega_t) = \frac{1}{RC\sqrt{\omega_t^2+\left(\frac{1}{RC}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (RC)^2(\omega_t^2+\left(\frac{1}{RC}\right)^2) = 2 \\ \Rightarrow \omega_t^2 = 2\frac{1}{(RC)^2}-\left(\frac{1}{RC}\right)^2 \Rightarrow \boxed{\omega_t = \frac{1}{RC}} \end{gathered} \tag{7}$$

In virtù della (7) la (1) si scrive:

$$H(s) = \frac{\omega_t}{(s + \omega_t)} \qquad (1.\text{bis})$$

Ricordando che in un circuito serie R-C il prodotto RC è pari alla costante di tempo del circuito, possiamo dire che la pulsazione di taglio è pari all'inverso della costante di tempo.
In corrispondenza della pulsazione di taglio la fase (5) assume il valore:
$\varphi(\omega) = arctg(-\omega_t RC)$, che, in base alla (7) permette di ricavare:

$$\varphi(\omega) = arctg(-\omega_t RC) = arctg(-\frac{RC}{RC}) = arctg(-1) = -\frac{\pi}{4} \qquad (8)$$

Si ritengono "passati" tutti quei segnali che possiedono un modulo superiore a quello relativo alla pulsazione di taglio.
Quindi, per la (4) e la (6) si ha:

$$\frac{1}{RC\sqrt{\omega_{passate}{}^2 + \left(\frac{1}{RC}\right)^2}} \geq \frac{1}{RC\sqrt{\omega_t{}^2 + \left(\frac{1}{RC}\right)^2}} \Rightarrow \omega_{passate}{}^2 + \left(\frac{1}{RC}\right)^2 \leq \omega_t{}^2 + \left(\frac{1}{RC}\right)^2$$
$$\Rightarrow \boxed{\omega_{passate} \leq \omega_t} \qquad (9)$$

Dalla proprietà (9) si evince che il segnale prelevato sul condensatore di una serie R-C ha proprietà filtranti di tipo Passa-Basso ("passano le pulsazioni più piccole della pulsazione di taglio).
In Figura 1, è riportato a titolo d'esempio l'andamento del modulo (4) della funzione di trasferimento in tensione per un filtro passa-basso R-C con R = 1 kΩ e C = 0.159μF e relativa frequenza di taglio di 1 kHz.

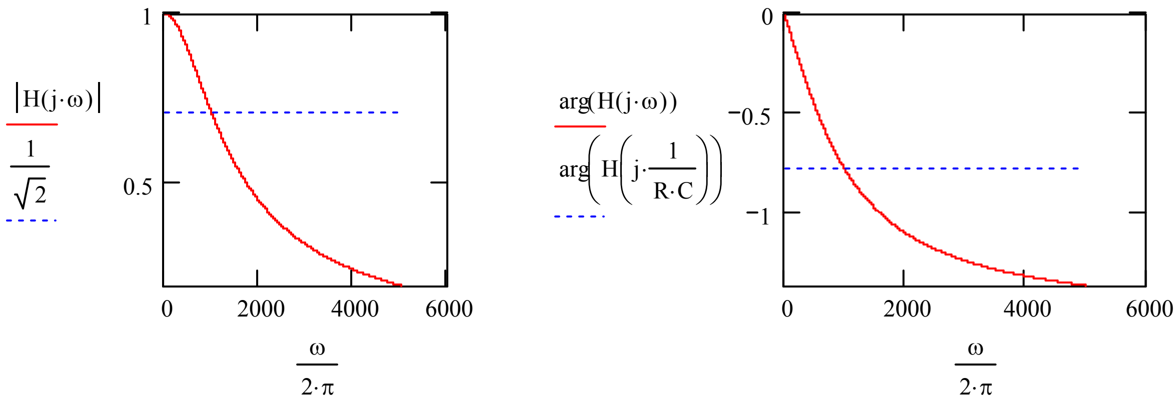


Fig.1 Andamento del modulo Andamento della fase

Filtro Attivo

Una realizzazione di filtro attivo “passa basso” del I ordine è realizzabile attraverso il circuito in Fig. 2.

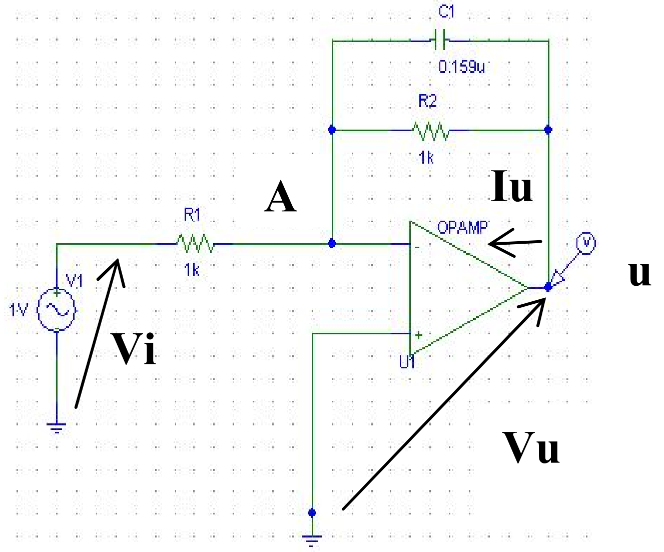


Fig.2 Schema di un Filtro attivo passa basso del I ordine

Applicando il metodo dei nodi si ha, infatti:

$$\begin{pmatrix} G_1+G_2+sC_1 & -G_2-sC_1 \\ -G_2-sC_1 & G_2+sC_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_A=0 \\ V_u \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} V_iG_1 \\ -I_u \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -G_2-sC_1 \\ 1 & G_2+sC_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_u \\ V_u \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} V_iG_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \frac{V_u}{V_i}=\frac{-G_1}{G_2+sC_1}=\frac{-G_1}{C_1(s+\frac{G_2}{C_1})}=-\frac{\omega_t}{s+\omega_t} \tag{10}$$
$$con \quad \omega_t=\frac{G_1}{C_1} \quad ponendo \quad G_1=G_2$$

L’unica differenza tra la funzione di rete (10) e la (1.bis) è il segno. Ciò non altera, ovviamente, l’andamento del modulo, mentre causerà un’opposizione di fase, cosa eliminabile se il segnale d’uscita dallo stadio filtrante fosse nuovamente usato come ingresso di un amplificatore invertente ad amplificazione unitaria.

2. Passa-Alto

Consideriamo la funzione di rete: *Trasferimento in tensione* ai capi di un induttore ideale di induttanza L posto in serie ad un resistore ideale di resistenza R:

$$H(s) = \frac{V_L(s)}{E(s)} = \frac{sL}{R + sL} = \frac{s}{s + \frac{R}{L}} \tag{1}$$

la risposta in frequenza si ottiene sostituendo alla variabile s della funzione di rete, la quantità immaginaria $j\omega$ (dove, come noto $\omega = 2\pi f$ è la pulsazione [radianti/secondo] e f è la frequenza [Hz]).
Si avrà dalla (1):

$$H(j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega + \frac{R}{L}} \tag{2}$$

La funzione di rete è, per la (2) un numero complesso funzione della pulsazione che può espresso in forma euleriana:

$$H(j\omega) = H(\omega)e^{\varphi(\omega)} \tag{3}$$

dove la funzione:

$$H(\omega) = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \left(\frac{R}{L}\right)^2}} \tag{4}$$

rappresenta il modulo della funzione di rete, mentre

$$\varphi(\omega) = arctg(\frac{\omega L}{R}) \tag{5}$$

ne rappresenta l'argomento, cioè la fase.

Come detto, si definisce pulsazione di taglio quel particolare valore della pulsazione, che indicheremo con ω_t, tale che:

$$H(\omega_t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0.707 \tag{6}$$

Si ottiene allora, in virtù della (4):

$$\begin{aligned} &H(\omega_t) = \frac{\omega_t}{\sqrt{\omega_t^2 + \left(\frac{R}{L}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \omega_t^2 + \left(\frac{R}{L}\right)^2 = 2\omega_t^2 \\ &\Rightarrow \omega_t^2 - 2\omega_t^2 + \left(\frac{R}{L}\right)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\omega_t = \frac{R}{L}} \end{aligned} \tag{7}$$

In virtù della (7) la (1) si scrive:

$$H(s) = \frac{s}{(s + \omega_t)} \tag{1.bis}$$

Ricordando che in un circuito serie R-L il rapporto L/R è pari alla costante di tempo del circuito, possiamo dire che la pulsazione di taglio è pari all'inverso della costante di tempo.
In corrispondenza della pulsazione di taglio la fase (5) assume il valore:
$\varphi(\omega) = arctg(\omega_t \frac{R}{L})$, che, in base alla (7) permette di ricavare:

$$\varphi(\omega) = arctg(\frac{\omega_t L}{R}) = arctg(-\frac{RL}{LR}) = arctg(1) = \frac{\pi}{4} \qquad (8)$$

Si ritengono "passati" tutti quei segnali che possiedono un modulo superiore a quello relativo alla pulsazione di taglio.
Quindi, per la (4) e la (6) si ha:

$$\frac{\omega_{passate}}{\sqrt{\omega^2{}_{passate} + \left(\frac{R}{L}\right)^2}} \geq \frac{\omega_t}{\sqrt{\omega_t{}^2 + \left(\frac{R}{L}\right)^2}} \Rightarrow \frac{\omega^2{}_{passate}}{\omega^2{}_{passate} + \left(\frac{R}{L}\right)^2} \geq \frac{\omega_t{}^2}{\omega_t{}^2 + \left(\frac{R}{L}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \omega_t{}^2 \omega^2{}_{passate} + \left(\frac{R}{L}\right)^2 \omega^2{}_{passate} \geq \omega_t{}^2 \omega^2{}_{passate} + \left(\frac{R}{L}\right)^2 \omega_t{}^2 \qquad (9)$$

$$\boxed{\omega_{passate} \geq \omega_t}$$

Dalla proprietà (9) si evince che il segnale prelevato sull'induttore di una serie R-L ha proprietà filtranti di tipo Passa-Alto ("passano le pulsazioni più grandi della pulsazione di taglio).
In Figura 3, è riportato a titolo d'esempio l'andamento del modulo (4) della funzione di trasferimento in tensione per un filtro passa-alto R-L con R = 1 kΩ e L = 159.155mH e relativa frequenza di taglio di 1 kHz.

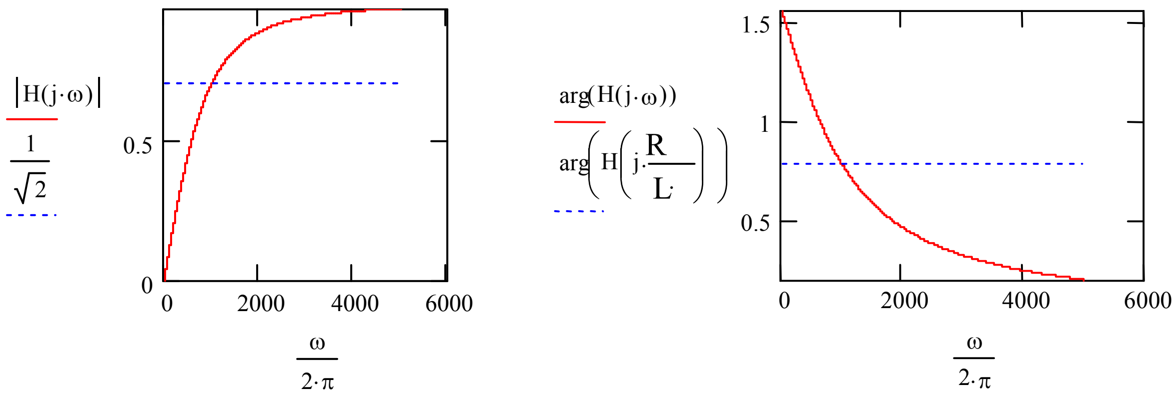


Fig.3 Andamento del modulo Andamento della fase

Filtro Attivo
Una realizzazione di filtro attivo “passa alto” del I ordine è realizzabile attraverso il circuito in Fig. 2.

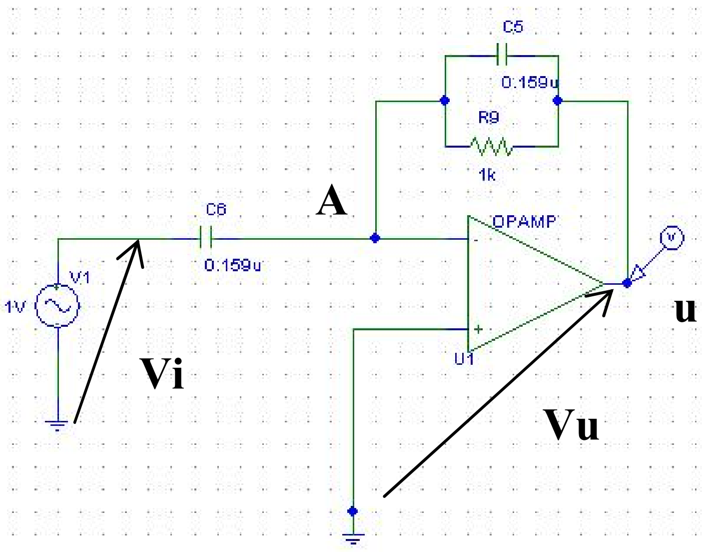


Fig.2 Schema di un Filtro attivo passa basso del I ordine

Applicando il metodo dei nodi si ha, infatti:

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} G_9 + s(C_5 + C_6) & -(G_9 + sC_5) \\ -(G_9 + sC_5) & G_9 + sC_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_A = 0 \\ V_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_i sC_6 \\ -I_u \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -(G_9 + sC_5) \\ 1 & G_9 + sC_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_u \\ V_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_i sC_6 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \frac{V_u}{V_i} = \frac{-sC_6}{G_9 + sC_5} = \frac{-sC_6}{C_5(s + \frac{G_9}{C_5})} = -\frac{s}{s + \omega_t} \\
&con \quad \omega_t = \frac{G_9}{C_5} \quad ponendo \quad C_5 = C_6
\end{aligned} \tag{10}$$

L’unica differenza tra la funzione di rete (10) e la (1.bis) è il segno. Ciò non altera, ovviamente, l’andamento del modulo, mentre causerà un’opposizione di fase, cosa eliminabile se il segnale d’uscita dallo stadio filtrante fosse nuovamente usato come ingresso di un amplificatore invertente ad amplificazione unitaria. Si noti come nella realizzazione attiva il filtro non ha induttori, cosa che lo rende adatto a realizzazioni integrate.

Filtri del II ordine

Prendiamo ora in considerazione un circuito serie R-L-C e proponiamoci di considerare le tre funzioni di trasferimento che si ottengono considerando di prelevare il segnale come tensione ai capi del resistore, dell'induttore e del condensatore rispettivamente.

Filtro Passivo Passa Banda

Se prendiamo il segnale sul resistore R, di un circuito serie R-L-C otterremo la seguente funzione di trasferimento in tensione:

$$H(s)=\frac{R}{sL+R+\frac{1}{sC}}=\frac{sCR}{s^2LC+sRC+1}=\frac{sCR}{LC(s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC})}$$
$$\Rightarrow H(s)=\frac{sR}{L(s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC})}=\boxed{\frac{Bs}{(s^2+Bs+\omega_0^2)}} \tag{1}$$

dove chiaramente si è posto: $B=\frac{R}{L}$ e $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ ed il cui significato verrà presto evidenziato. La funzione di rete relativa ad un filtro passa banda del secondo ordine presenta uno zero per s = 0.
Vediamo dunque di capire le proprietà in frequenza della funzione di rete sostituendo, come di consueto, alla variabile *s* la quantità $j\omega$. La (1) diviene:

$$H(j\omega)=\frac{j\omega R}{L(-\omega^2+\frac{R}{L}j\omega+\frac{1}{LC})}=\frac{j\omega B}{(\omega_0^2-\omega^2+j\omega B)}=$$
$$=\frac{j\omega B\left[(\omega_0^2-\omega^2)-j\omega B\right]}{(B\omega)^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2}=\boxed{\frac{(\omega B)^2+jB\omega\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+(\omega B)^2}} \tag{2}$$

Calcoliamo rispettivamente il modulo e la fase della (2):

$$|H(j\omega)|=\boxed{\frac{B\omega}{\sqrt{(B\omega)^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2}}} \tag{3}$$

$$\varphi(\omega)=arctg\left[\frac{B\omega(\omega_0^2-\omega^2)}{(B\omega)^2}\right]=\boxed{arctg\left[\frac{(\omega_0^2-\omega^2)}{(B\omega)}\right]} \tag{4}$$

Considerando la (3) si vede che essa presenta un massimo per:

$$\frac{d|H(j\omega)|}{d\omega}=\frac{d}{d\omega}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2}{(B\omega)^2}}}=\frac{d}{d\omega}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{(\omega_0^4-2\omega_0^2\omega^2+\omega^4)}{(B\omega)^2}}}=0$$
$$\Rightarrow\frac{d}{d\omega}\left[\frac{\omega_0^4}{(B\omega)^2}-\frac{2\omega_0^2}{(B)^2}+\frac{\omega^2}{(B)^2}\right]=-\frac{2\omega_0^4}{B^2(\omega)^3}+\frac{2\omega}{(B)^2}=-\frac{2(\omega_0^4-\omega^4)}{B^2(\omega)^3}=0$$
$$\Rightarrow\boxed{\omega_{\max diH}=\omega_0} \tag{5}$$
$$|H(j\omega_0)|=H_{\max}=\boxed{\frac{B\omega_0}{\sqrt{(B\omega_0)^2+(\omega_0^2-\omega_0{}^2)^2}}=1}$$
$$\varphi(\omega_0)=\boxed{arctg\left[\frac{(\omega_0^2-\omega_0{}^2)}{(B\omega)}=0\right]}$$

Quindi ω_0 **rappresenta la pulsazione di risonanza**, cioè quel valore della pulsazione che rende il circuito come fosse resistivo puro (si annullano le reattanze capacitiva ed induttiva).
Mentre agli estremi del campo di definizione di $H(j\omega)$ avremo:

$\lim_{\omega\to\infty}|H(j\omega)|=0$ e $\lim_{\omega\to 0}|H(j\omega)|=0$, dunque, per quanto detto, la funzione di trasferimento (1) descrive un filtro passa banda, in quanto solo un insieme (banda) di frequenze porterà al superamento del modulo della $H(j\omega)$ del valore $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Calcoliamo dunque il valore delle 2 pulsazioni di taglio:

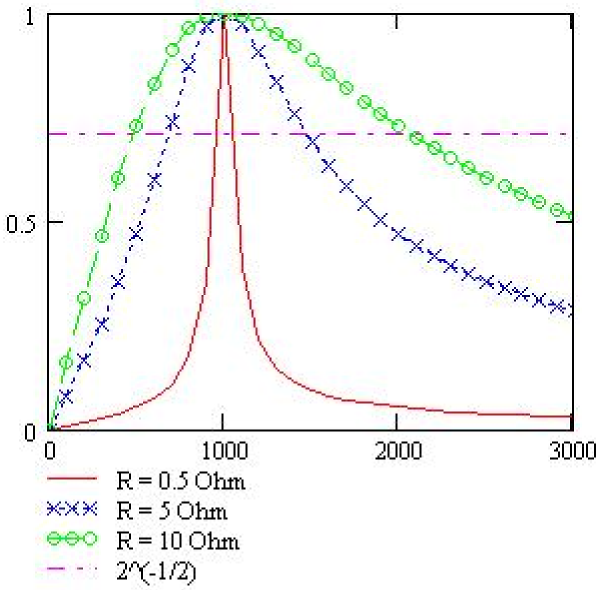
$$\frac{B\omega_t}{\sqrt{(B\omega_t)^2+(\omega_0^2-\omega_t^2)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\Rightarrow 2\left(B\omega_t\right)^2-(B\omega_t)^2-(\omega_0^2-\omega_t^2)^2=0$$
$$\Rightarrow \left(B\omega_t\right)^2=(\omega_0^2-\omega_t^2)^2$$
$$\Rightarrow B\omega_t=\pm(\omega_0^2-\omega_t^2) \quad \textit{essendo } B\omega_t \textit{ sicuramente positivo}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \textit{per } \omega_t>\omega_0 \Rightarrow B\omega_t=-(\omega_0^2-\omega_t^2)\Rightarrow \omega_{t1}=\dfrac{B+\sqrt{B^2+4\omega_0^2}}{2} \\ \textit{per } \omega_t<\omega_0 \Rightarrow B\omega_t=(\omega_0^2-\omega_t^2)\Rightarrow \omega_{t2}=\dfrac{-B+\sqrt{B^2+4\omega_0^2}}{2} \end{cases} \tag{6}$$

la differenza tra le due pulsazioni di taglio è

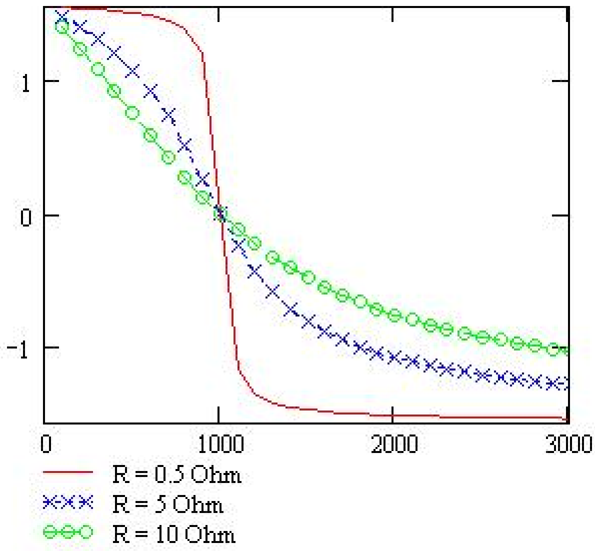
$$\omega_{t1}-\omega_{t2}=\frac{B+\sqrt{B^2+4\omega_0^2}}{2}-\frac{-B+\sqrt{B^2+4\omega_0^2}}{2}=B$$

da ciò si evince che il valore di B **è coincidente con l'ampiezza della banda passante.**

Consideriamo, a titolo d'esempio un caso in cui sia C = 25.33 μF e L = 1 mH. Al variare di R tra 0.5Ω e 10 Ω si avranno gli andamenti in Figura di modulo e di fase della funzione di trasferimento in tensione calcolata sul resistore:



Andamento del modulo della funzione di rete



Andamento dell'argomento (fase) della funzione di rete

Si definisce fattore di merito, Q, il rapporto tra il modulo della tensione sull'induttore (o sul condensatore) e il modulo della tensione sul resistore alla pulsazione di risonanza:
$Q = \frac{\omega_0 L}{R}$ ovvero $Q = \frac{1}{\omega_0 CR}$.

In base all'espressione della banda passante, si trova che: $Q = \frac{\omega_0}{B}$. Ciò comporta che ci si può esprimere sia in termini di banda passante che di fattore di merito per descrivere il grado di selettività del filtro passa banda. E' altresì chiaro che la selettività è tanto più alta quanto più piccola è il valore della resistenza.

Filtro Passivo Passa Basso

Se prendiamo il segnale sul condensatore C, di un circuito serie R-L-C otterremo la seguente funzione di trasferimento in tensione:

$$H(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{sL + R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{s^2 LC + sRC + 1} = \frac{1}{LC(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC})}$$
$$\Rightarrow H(s) = \boxed{\frac{\omega_0^2}{(s^2 + Bs + \omega_0^2)}} \tag{1}$$

dove chiaramente si è posto: $B = \frac{R}{L}$ e $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.
La funzione di rete relativa ad un filtro passa basso del secondo ordine non presenta zeri.

Vediamo dunque di capire le proprietà in frequenza della funzione di rete sostituendo, come di consueto, alla variabile s la quantità $j\omega$. La (1) diviene:

$$H(j\omega)=\frac{\omega_0^2}{(-\omega^2+Bj\omega+\omega_0^2)}=\boxed{\frac{\omega_0^2\left((\omega_0^2-\omega^2)-j\omega B\right)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\omega B)^2}}$$

(2)

Calcoliamo rispettivamente il modulo e la fase della (2) nella forma $H(j\omega)=|H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$:

$$|H(j\omega)|=\boxed{\frac{\omega_0^2}{\sqrt{(B\omega)^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2}}} \qquad (3)$$

$$\varphi(\omega)=\begin{cases}\boxed{arctg\left(\frac{-B\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right)} & per\ \omega\le\omega_0\\ \\ \boxed{arctg\left(\frac{-B\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right)-\pi} & per\ \omega>\omega_0\end{cases} \qquad (4)$$

Si vede dalla (3) che

$\lim_{\omega\to\infty}|H(j\omega)|=0$ mentre $\lim_{\omega\to 0}|H(j\omega)|=1$, dunque, la funzione di trasferimento (1) descrive un filtro passa basso, in quanto solo un insieme di "basse" frequenze porterà al superamento del modulo della $H(j\omega)$ del valore $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Calcoliamo dunque il valore delle 2 pulsazioni di taglio:

$$\begin{aligned}
&\frac{\omega_0^2}{\sqrt{(B\omega_t)^2+(\omega_0^2-\omega_t^2)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\\
&\Rightarrow (B\omega_t)^2+(\omega_0^2-\omega_t^2)^2=2\omega_0^4\\
&\Rightarrow (B\omega_t)^2=2\omega_0^4-(\omega_0^2-\omega_t^2)^2\\
&posto\ x=\omega_t^2 \Rightarrow \left(B^2-2\omega_0^2\right)x-\omega_0^4+x^2=0\\
&\Rightarrow x=\frac{-\left(B^2-2\omega_0^2\right)\pm\sqrt{\left(B^2-2\omega_0^2\right)^2+4\omega_0^4}}{2} \quad dovendo\ essere\ \omega_t\ sicuramente\ positivo\\
&\Rightarrow \omega_t=\sqrt{\frac{-\left(B^2-2\omega_0^2\right)+\sqrt{\left(B^2-2\omega_0^2\right)^2+4\omega_0^4}}{2}}
\end{aligned} \qquad (5)$$

Ovviamente la funzione (3) possiede un punto di massimo calcolabile, nel caso presente, semplicemente eguagliando a zero la derivata del suo denominatore:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\omega}\left[(B\omega)^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2\right]=0\\
&\Rightarrow 2B^2\omega-4\omega(\omega_0^2-\omega^2)=0\\
&\Rightarrow \omega_m=\frac{4\omega_0^2-2B^2}{4}
\end{aligned} \qquad (6)$$

Se, in base alla (6), si desidera avere il massimo valore del modulo della funzione di rete nel punto $\omega_m=0$, allora si trova che deve essere:

$$B = \omega_0 \sqrt{2} \tag{7}$$

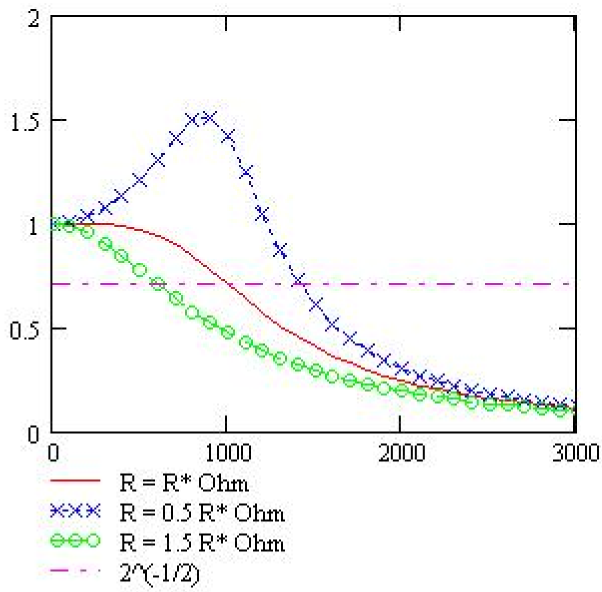
Ciò comporta che, in tal caso, la pulsazione di taglio, in base alla (5), diviene:

$$\omega_t = \omega_0 \tag{8}$$

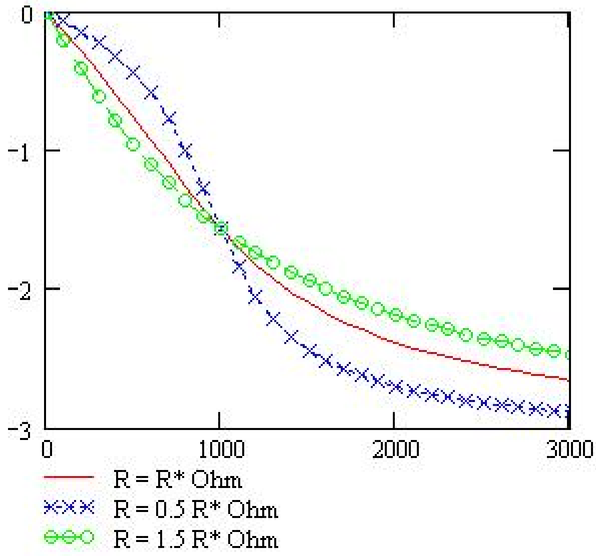
Ovviamente la (7) implica che la resistenza sia unicamente determinata una volta che si sia fissato il valore di L:

$$R^* = \omega_0 L \sqrt{2} \tag{9}$$

Consideriamo, a titolo d'esempio un caso in cui sia C = 25.33 µF e L = 1 mH, cioè una frequenza di risonanza di 1 kHz e una resistenza $R^* = 8.886\,\Omega$, calcolata tramite la (9). Al variare di R intorno al valore R^*. Si avranno gli andamenti in Figura di modulo e di fase della funzione di trasferimento in tensione calcolata sul condensatore:



Andamento del modulo della funzione di rete



Andamento dell'argomento (fase) della funzione di rete

Filtro Passivo Passa Alto

Se prendiamo il segnale sull'induttore L, di un circuito serie R-L-C otterremo la seguente funzione di trasferimento in tensione:

$$H(s)=\frac{sL}{sL+R+\frac{1}{sC}}=\frac{s^2LC}{s^2LC+sRC+1}=\frac{s^2}{(s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC})}$$
$$\Rightarrow H(s)=\boxed{\frac{s^2}{(s^2+Bs+\omega_0^2)}} \qquad (1)$$

dove chiaramente si è sempre posto: $B=\frac{R}{L}$ e $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$.

La funzione di rete relativa ad un filtro passa alto del secondo ordine possiede uno zero di molteplicità 2 in $s=0$.

Vediamo dunque di capire le proprietà in frequenza della funzione di rete sostituendo, come di consueto, alla variabile *s* la quantità $j\omega$. La (1) diviene:

$$H(j\omega)=\frac{-\omega^2}{(-\omega^2+Bj\omega+\omega_0^2)}=\frac{-\omega^2\left[-jB\omega+(\omega_0^2-\omega^2)\right]}{(B\omega)^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2}=\boxed{\frac{\omega^2\left[jB\omega-(\omega_0^2-\omega^2)\right]}{(B\omega)^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2}}$$
(2)

Calcoliamo rispettivamente il modulo e la fase della (2) nella forma $H(j\omega)=|H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$:

$$|H(j\omega)|=\boxed{\frac{\omega^2}{\sqrt{(B\omega)^2+\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2}}} \qquad (3)$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} arctg\left(\dfrac{-B\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \; per\; \omega > \omega_0 \\ \\ arctg\left(\dfrac{-B\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) + \pi \; per\; \omega \le \omega_0 \end{cases} \tag{4}$$

Si vede dalla (3) che $\lim_{\omega \to \infty} |H(j\omega)| = 1$ mentre $\lim_{\omega \to 0} |H(j\omega)| = 0$, dunque, la funzione di trasferimento (1) descrive un filtro passa alto, in quanto solo un insieme di "alte" frequenze porterà al superamento del modulo della $H(j\omega)$ del valore $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Calcoliamo dunque il valore delle 2 pulsazioni di taglio:

$$\begin{aligned}
&\frac{\omega^2}{\sqrt{\left(B\omega_t\right)^2 + \left(\omega_0^2 - \omega_t^2\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&\Rightarrow (B\omega_t)^2 + (\omega_0^2 - \omega_t^2)^2 = 2\omega_t^4 \\
&\Rightarrow \left(B\omega_t\right)^2 = 2\omega_t^4 - (\omega_0^2 - \omega_t^2)^2 \\
&posto\; x = \omega_t^2 \Rightarrow \left(-B^2 + 2\omega_0^2\right)x - \omega_0^4 + x^2 = 0 \\
&\Rightarrow x = \frac{\left(B^2 - 2\omega_0^2\right) \pm \sqrt{\left(B^2 - 2\omega_0^2\right)^2 + 4\omega_0^4}}{2} \quad dovendo\; essere\; \omega_t\; sicuramente\; positivo \\
&\Rightarrow \omega_t = \sqrt{\frac{\left(B^2 - 2\omega_0^2\right) + \sqrt{\left(B^2 - 2\omega_0^2\right)^2 + 4\omega_0^4}}{2}}
\end{aligned} \tag{5}$$

Ovviamente la funzione (3) possiede un punto di massimo calcolabile, nel caso presente, semplicemente eguagliando a zero la derivata del suo denominatore:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\omega}\left[\frac{B^2\omega^2}{\omega^4} + \frac{\omega_0^4}{\omega^4} - 2\frac{\omega_0^2\omega^2}{\omega^4} + \frac{\omega^4}{\omega^4}\right] = 0 \\
&\Rightarrow -\frac{2B^2}{\omega^3} - \frac{\omega_0^4 4}{\omega^5} + 4\frac{\omega_0^2}{\omega^3} = 0 \\
&\Rightarrow \left(4\omega_0^2 - 2B^2\right)\omega^2 - 4\omega_0^4 = 0 \\
&\Rightarrow \omega_m = \sqrt{\frac{4\omega_0^4}{\left(4\omega_0^2 - 2B^2\right)}}
\end{aligned} \tag{6}$$

Se, in base alla (6), si desidera avere il massimo valore del modulo della funzione di rete per $\omega_m \to \infty$, allora si trova che deve essere nullo il denominatore dell'ultima delle (6), da cui:

$$B = \omega_0\sqrt{2} \tag{7}$$

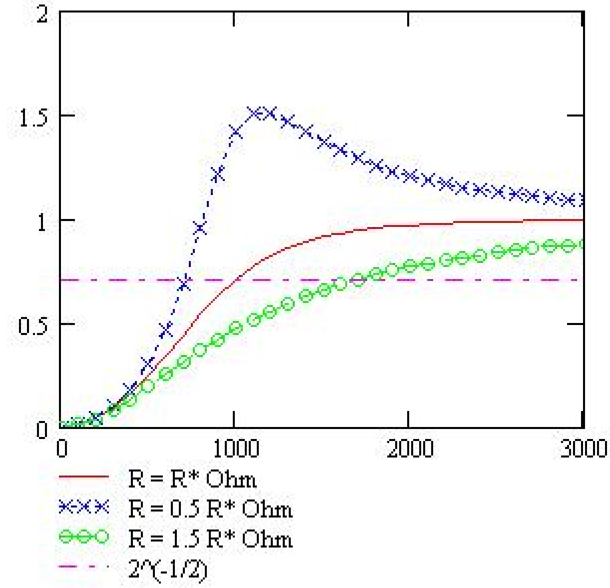
Ciò comporta che, in tal caso, la pulsazione di taglio, in base alla (5), diviene:

$$\omega_t = \omega_0 \tag{8}$$

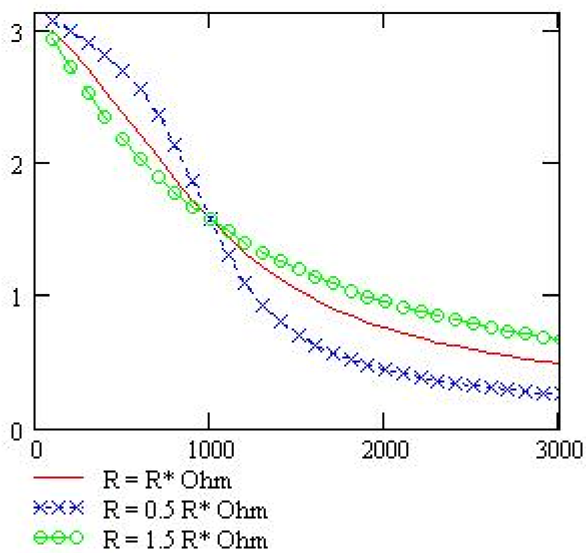
come già trovato per il passa basso.
Ovviamente la (7) implica che la resistenza sia unicamente determinata una volta che si sia fissato il valore di L:

$$R^* = \omega_0 L\sqrt{2} \tag{9}$$

Consideriamo, a titolo d'esempio un caso in cui sia C = 25.33 μF e L = 1 mH, cioè una frequenza di risonanza di 1 kHz e una resistenza $R^* = 8.886\,\Omega$, calcolata tramite la (9), . Al variare di R intorno al valore R^*. Si avranno gli andamenti in Figura di modulo e di fase della funzione di trasferimento in tensione calcolata sull'induttore:



Andamento del modulo della funzione di rete



Andamento dell'argomento (fase) della funzione di rete

Filtro Passivo Elimina Banda

Se prendiamo il segnale somma della tensione sull'induttore L e sul condensatore C, di un circuito serie R-L-C otterremo la seguente funzione di trasferimento in tensione:

$$H(s) = \frac{\frac{1}{sC} + sL}{sL + R + \frac{1}{sC}} = \frac{1 + s^2LC}{s^2LC + sRC + 1} = \frac{LC(s^2 + \frac{1}{LC})}{LC(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC})}$$
$$\Rightarrow H(s) = \boxed{\frac{s^2 + \omega_0^2}{(s^2 + Bs + \omega_0^2)}} \qquad (1)$$

dove chiaramente si è posto: $B = \frac{R}{L}$ e $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

La funzione di rete relativa ad un filtro elimina banda del secondo ordine presenta due zeri immaginari coniugati per $s = \pm j\omega_0$.

Vediamo dunque di capire le proprietà in frequenza della funzione di rete sostituendo, come di consueto, alla variabile s la quantità $j\omega$. La (1) diviene:

$$H(j\omega) = \boxed{\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(-\omega^2 + Bj\omega + \omega_0^2)}} \qquad (2)$$

Calcoliamo rispettivamente il modulo e la fase della (2):

$$|H(j\omega)| = \boxed{\frac{|\omega_0^2 - \omega^2|}{\sqrt{(B\omega)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}} \qquad (3)$$

$$H(j\omega) = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)\left[-jB\omega + (\omega_0^2 - \omega^2)\right]}{(B\omega)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2} = |H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$
$$\Rightarrow \varphi(\omega) = \boxed{arctg\left(\frac{-B\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)} \qquad (4)$$

Si vede dalla (3) che $|H(j\omega_0)| = 0$ mentre sia $\lim_{\omega \to \infty} |H(j\omega)| = 1$, sia $\lim_{\omega \to 0} |H(j\omega)| = 1$, dunque, la funzione di trasferimento (1) descrive un filtro elimina banda, in quanto solo un insieme di frequenze sarà al di sotto del modulo della $H(j\omega)$ del valore $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Calcoliamo dunque il valore delle 2 pulsazioni di taglio:

$$\boxed{\frac{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2}}{\sqrt{(B\omega)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\Rightarrow (B\omega_t)^2 + (\omega_0^2 - \omega_t^2)^2 = 2\left(\omega_0^2 - \omega_t^2\right)^2$$
$$\Rightarrow \left(B\omega_t\right)^2 = (\omega_0^2 - \omega_t^2)^2$$
$$posto\ x = \omega_t^2 \Rightarrow -\left(B^2 + 2\omega_0^2\right)x + \omega_0^4 + x^2 = 0$$
$$\Rightarrow x = \frac{\left(B^2 + 2\omega_0^2\right) \pm \sqrt{\left(B^2 + 2\omega_0^2\right)^2 - 4\omega_0^4}}{2} \quad dovendo\ essere\ \omega_t\ sicuramente\ positivo \qquad (5)$$
$$\Rightarrow \omega_{t1,2} = \sqrt{\frac{\left(B^2 + 2\omega_0^2\right) \pm \sqrt{\left(B^2 + 2\omega_0^2\right)^2 - 4\omega_0^4}}{2}}$$

Se operassimo una traslazione dell'asse delle ascisse in modo da definire un nuovo sistema di pulsazioni fittizio tale che per il nuovo asse ω' la propria origine coincida con la pulsazione di risonanza, cioè $\omega' = 0 \ per \ \omega = \omega_0$, avremo che l'ampiezza della banda eliminata misurata nei due sistemi di riferimento è la stessa, ma semplificheremmo notevolmente i calcoli perchè avremmo:

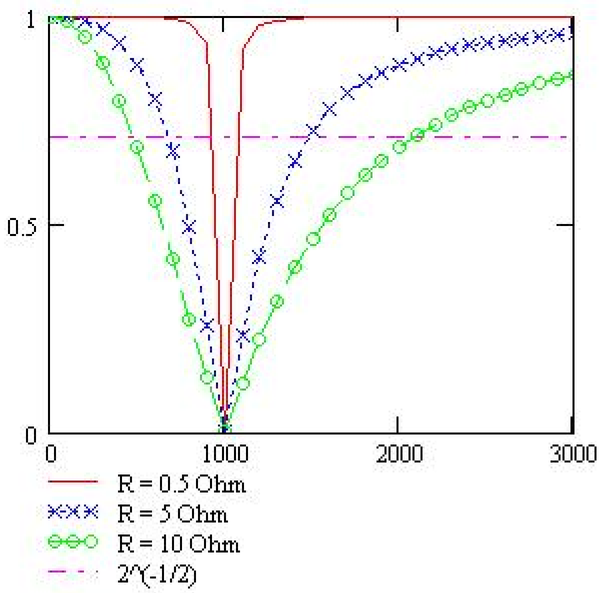
$$\omega_{t2} - \omega_{t1} = \omega'_{t2} - \omega'_{t1}$$

$$\sqrt{\frac{\left(B^2 + 2\omega_0^2\right) + \sqrt{\left(B^2 + 2\omega_0^2\right)^2 - 4\omega_0^4}}{2}} - \sqrt{\frac{\left(B^2 + 2\omega_0^2\right) - \sqrt{\left(B^2 + 2\omega_0^2\right)^2 - 4\omega_0^4}}{2}} = \tag{6}$$

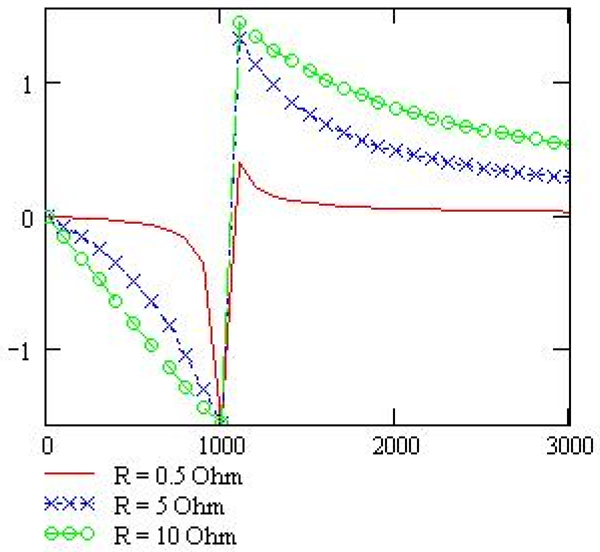
$$= \sqrt{\frac{\left(B^2\right) + \sqrt{\left(B^2\right)^2}}{2}} - \sqrt{\frac{\left(B^2\right) - \sqrt{\left(B^2\right)^2}}{2}} = B$$

Dalla (6) si evince che la banda eliminata vale proprio B che era il valore della banda passante nel filtro passa banda.

Si riportano gli andamenti in Figura di modulo e di fase della funzione di trasferimento in tensione calcolata sulla serie induttore-condensatore:



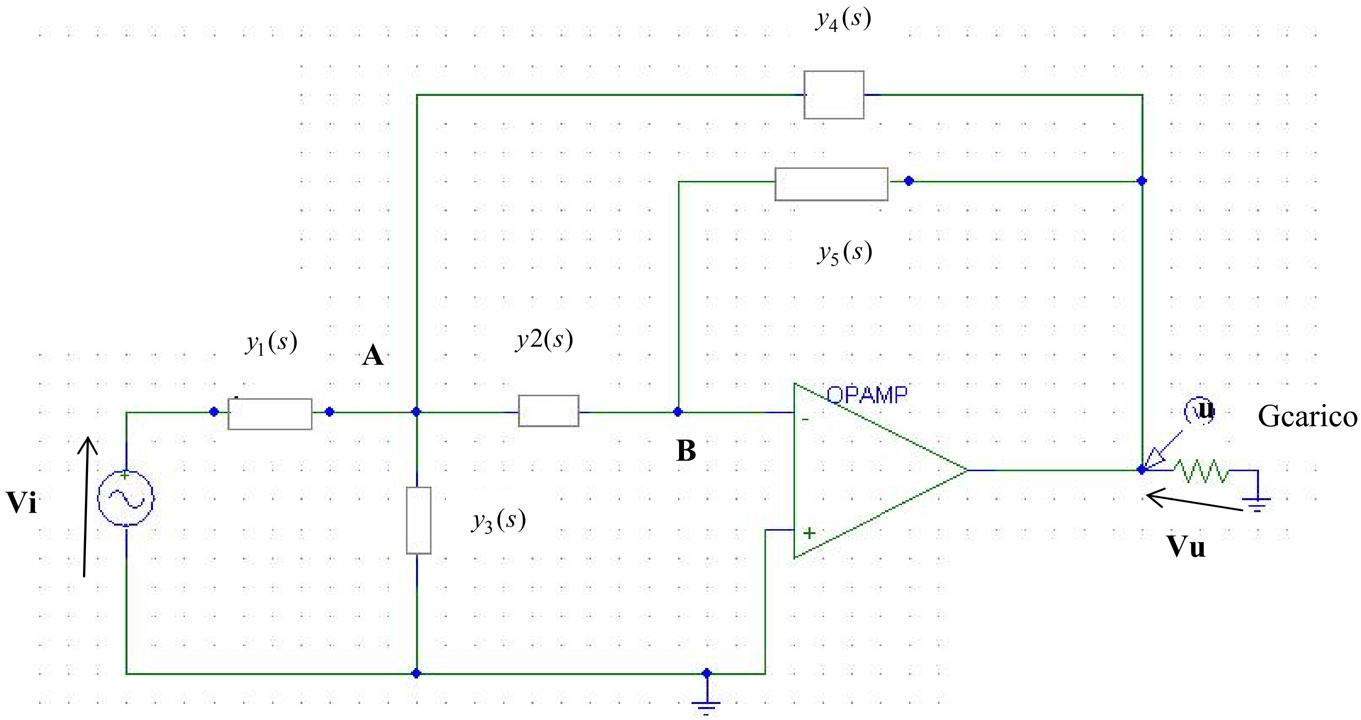
Andamento del modulo della funzione di rete Elimina Banda



Andamento dell'argomento (fase) della funzione di rete Elimina Banda

Esempi di Filtri Attivi del II ordine

Si consideri il circuito in figura:



che risolviamo con il metodo dei nodi:

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ u \end{array}\begin{pmatrix} (y_1+y_2+y_3+y_4) & -y_2 & -y_4 \\ -y_2 & y_2+y_5 & -y_5 \\ -y_4 & -y_5 & y_5+G_{carico} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_A \\ V_B \\ V_u \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1V_i \\ 0 \\ -I_u \end{pmatrix} \qquad (1)$$

$$vincolo\ operazionale: V_B = 0$$

quindi riarrangiando il sistema si ha, immediatamente:

$$
\begin{array}{l}
\begin{array}{c} A \\ B \\ u \end{array}
\begin{pmatrix} (y_1+y_2+y_3+y_4) & -y_2 & -y_4 \\ -y_2 & y_2+y_5 & -y_5 \\ -y_4 & -y_5 & (y_5+G_{carico}) \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} V_A \\ 0 \\ V_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1V_i \\ 0 \\ -I_u \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \begin{pmatrix} (y_1+y_2+y_3+y_4) & 0 & -y_4 \\ -y_2 & 0 & -y_5 \\ -y_4 & 1 & (y_5+G_{carico}) \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} V_A \\ I_u \\ V_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1V_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (2) \\
\Rightarrow Cramer: \\
V_u = \dfrac{-y_1y_2V_i}{(y_1+y_2+y_3+y_4)y_5+y_2y_4}
\end{array}
$$

Se si vuole realizzare un filtro passa banda che abbia lo stesso comportamento di quello descritto nel paragrafo dedicato al filtro passivo R-L-C passa banda si dovrà porre:

$$
V_u = \frac{-y_1y_2V_i}{(y_1+y_2+y_3+y_4)y_5+y_2y_4} = \frac{Bs}{s^2+Bs+\omega_0^2}V_i \qquad (3)
$$

da cui si vede che, a meno del segno, che se si prende $y_4 = sC_4$ e quindi $y_1 = G_1$, si dovrà e potrà porre $y_2 = sC_2$ e di conseguenza $y_5 = G_5$ e $y_3 = G_3$. Operando in tal modo si avrà:

$$
\begin{array}{l}
\dfrac{V_u}{V_i} = \dfrac{-G_1C_2s}{(G_1+C_2s+G_3+C_4s)G_5+C_2C_4s^2} = \dfrac{Bs}{s^2+Bs+\omega_0^2} \\
\Rightarrow \dfrac{-G_1\cancel{C_2}s}{C_4\cancel{C_2}\left(\dfrac{(G_1+G_3)G_5}{C_2C_4}+\dfrac{(C_2+C_4)G_5}{C_2C_4}s+s^2\right)} = \dfrac{Bs}{s^2+Bs+\omega_0^2} \\
\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{G_1}{C_4} = B \\ \dfrac{(C_2+C_4)G_5}{C_2C_4} = B \\ \dfrac{(G_1+G_3)G_5}{C_2C_4} = \omega_0^2 \end{cases} \qquad (4)
\end{array}
$$

Così se si vuole realizzare un filtro corrispondente ad uno passivo dove C = 25.33 μF e L = 1 mH e R = 0.628 Ω, cioè con $\omega_0 = 2\pi1000\ rad/s$ (frequenza di risonanza 1 kHz) e banda passante $B = 2\pi100\ rad/s$ si avrà:

$$
\begin{cases} \dfrac{G_1}{C_4} = 2\pi100 \\ \dfrac{(C_2+C_4)G_5}{C_2C_4} = 2\pi100 \\ \dfrac{(G_1+G_3)G_5}{C_2C_4} = 4\pi^2 10^6 \end{cases}
$$

vincoli di esistenza dei parametri:

$$\frac{C_2+\frac{G_1}{B}}{\frac{G_1}{B}C_2}=\frac{B}{G_5}\Rightarrow\frac{C_2B+G_1}{G_1C_2}=\frac{B}{G_5}\Rightarrow\boxed{C_2=\frac{G_1}{(\frac{G_1}{G_5}-1)B}}\Rightarrow deve\ essere\ G_1>G_5 \qquad (5)$$

e

$$G_3=\omega_0^2\frac{C_2C_4}{G_5}-G_1\Rightarrow G_1<\omega_0^2\frac{C_2C_4}{G_5}. \qquad (6)$$

Assegnato, ad esempio il valore $R_1=750\Omega\Rightarrow G_1=1.33m\Omega^{-1}$ si ottiene che deve essere: $C_4=\frac{G_1}{B}=\frac{G_1}{2\pi100}=2.122\ \mu F$.

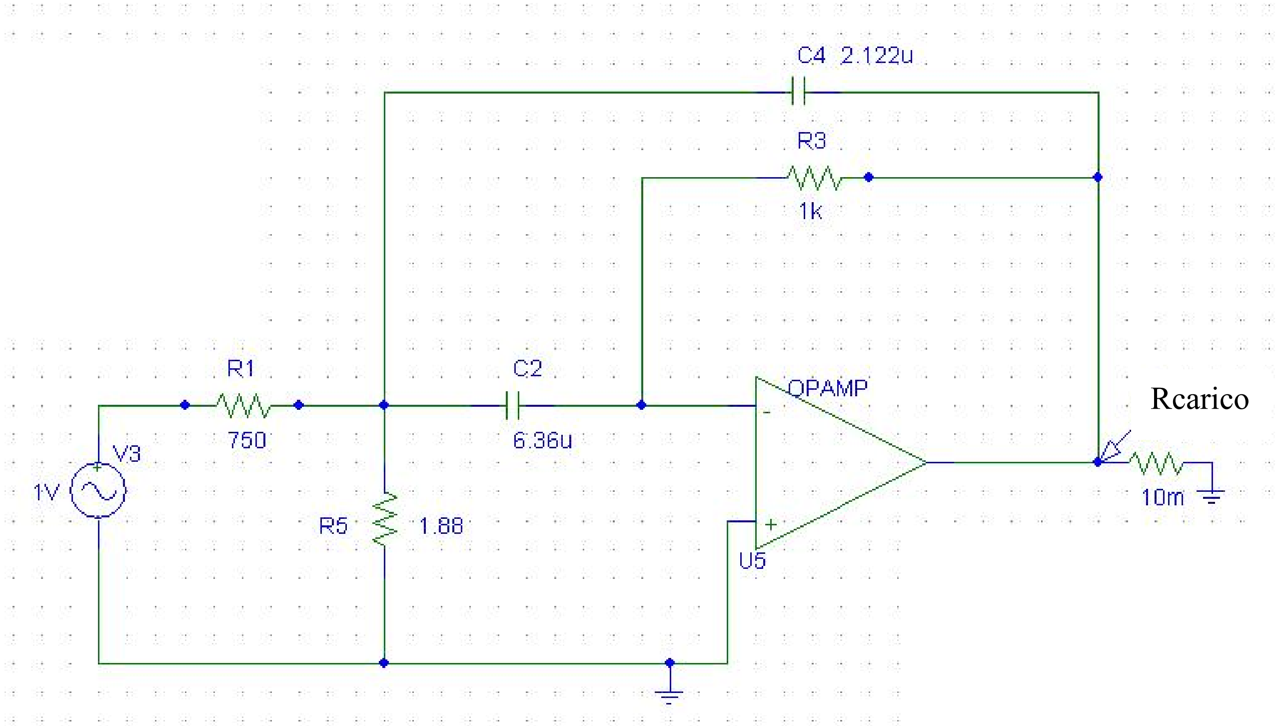
Preso allora $R_5=1\,k\Omega\Rightarrow G_5=1\,m\Omega$ che soddisfa la disequazione della (5) dovuta al vincolo d'esistenza dei parametri, si avrà che:

$$C_2=\frac{1.33\cdot10^{-3}}{(\frac{1.33\cdot10^{-3}}{10^{-3}}-1)2\pi100}=6.36\ \mu F .$$

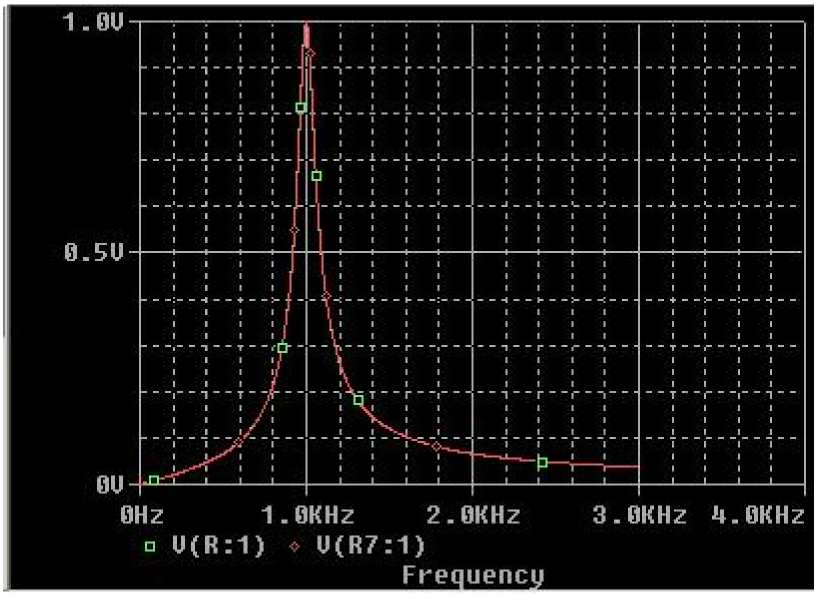
Non rimane ora che calcolare $G_3=4\pi^2 10^6\frac{C_2C_4}{G_5}-G_1$ e verificare l'altra disequazione della (6) di vincolo.

Si trova che $G_3=0.532\,\Omega^{-1}\Rightarrow R_3=1.88\,\Omega$.

Il filtro si presenta dunque:



e la risposta sul resistore di carico (il cui valore di resistenza non influenza mai le prestazioni del filtro) è riportata in Figura:



Andamento della funzione di trasferimento del filtro passa banda attivo precedentemente dimensionato