Indeterminazione

Finora si sono considerate le proprietà ondulatorie, lavorando sulla *fase* di una (per ora non meglio specificata) funzione. Si sono ricavate o ipotizzate relazioni per:
- lunghezza d’onda e momento
- energia e frequenza
- velocità di fase e di gruppo

Ancora non abbiamo considerato da vicino le proprietà corpuscolari, e in particolare la *posizione* della particella associata all’onda.
Onde vs. corpuscoli

Solide prove sperimentali che materia/luce presentino comportamento ondulatorio. Solide prove sperimentali che materia/luce presentino comportamento corpuscolare.

Assunzione: l’ampiezza di un’onda [di materia] racchiude informazioni sulla posizione della particella. Ampiezza elevata -> elevata probabilità di trovare la particella

Ampiezza uniforme su un’ampia regione: equiprobabilità di trovare la particella nella regione stessa: particella delocalizzata.

Circoscrivere la regione dove la particella può trovarsi: costruire un pacchetto d’onde.

Posizione vs. numero d’onda

Onda armonica (a $t=0$). Infinitamente estesa. Lunghezza d’onda $\lambda_0$. Numero d’onda $k_0=2\pi/\lambda_0$

Posizione completamente delocalizzata. Numero d’onda (=momento) perfettamente definito

Tratto di onda armonica di lunghezza $\Delta x$.
Costruzione del pacchetto d’onde mediante serie di Fourier con ampiezze dipendenti da $k$.
Onda localizzata $\leftrightarrow$ distribuzione di numeri d’onda con larghezza $\Delta k$ attorno a $k_0=2\pi/\lambda_0$. 
Principio di indeterminazione

Per un pacchetto d’onda: \( \Delta k \Delta x \sim 1 \)  

Nota: è una proprietà generale dei pacchetti d’onda, non riguarda la MQ (adimensionale)

Pacchetti d’onda molto localizzati <-> ampio spettro di numeri d’onda  
ovvero ampio intervallo di momento

Pacchetti d’onda con piccola distribuzione di \( k \) <-> particella delocalizzata  
e valore preciso di momento

Sperimentale: una particella è descrivibile come un pacchetto d’onda!

Poiché \( k = \frac{2\pi}{\hbar} p \)  
\( \Delta k = \frac{2\pi}{\hbar} \Delta p \)  
\( \Delta p \Delta x \sim \hbar \)

Principio di indeterminazione di Heisenberg

Principio di indeterminazione di Heisenberg

Non è possibile misurare simultaneamente (la stessa componente per) la posizione e il momento di una particella con precisione illimitata

\( \Delta p_x \Delta x \geq \hbar/2 \)  
\( \Delta p_y \Delta y \geq \hbar/2 \)  
\( \Delta p_z \Delta z \geq \hbar/2 \)

Non è una limitazione strumentale,  
è insito nella rappresentazione in termini di onde di materia.

Vale l’“≃” per un pacchetto gaussiano, il “≥” per un altro tipo di pacchetto d’onda.

Non è lecito pensare alla traiettoria della particella classica (Newtoniana), con momento \( p \) e posizione \( x(t) \) esattamente definite.
Verifica del principio di indeterminazione


misura indiretta

Fascio di molecole di C$_{70}$ collimate

\[ \Delta p = 0.89 \left( \frac{h}{2\pi} \right) / \Delta x \]

\( \Delta x \): larghezza della fenditura
\( \Delta p \): ottenuta dall’allargamento del fascio

Stabilità della materia e indeterminazione

Perché la materia non collassa?

Nota: le orbite stazionarie di Bohr violano il principio di indeterminazione!

Elettrone che si trovi esattamente nel minimo dell’energia potenziale
(ad esempio, proprio su un nucleo):

estremamente ben localizzato.

\[ \Delta p \Delta x \geq \hbar \]

=> grande indeterminazione sul momento,

ovvero: il pacchetto d’onda corrispondente counterrebbe molte componenti

a grande \( p \) con peso significativo.

=> grande energia cinetica!

\[ K = \frac{p^2}{2m} \]

=> un elettrone non può trovarsi esattamente in un punto

(ad esempio nel minimo del potenziale)!

La materia non collassa.
**Dimensioni atomiche (ordine di grandezza)**

\[ \Delta p \Delta x \geq \hbar \]

Assumiamo che l’elettrone giaccia su un orbita circolare (per semplicità). Allora la “lunghezza d’onda” dell’elettrone deve adattarsi a un cerchio di lunghezza \( 2 \pi r \). Il momento è allora (relazione di de Broglie): \( p = \hbar / \lambda \sim \hbar / r \)

L’energia totale è la somma di energia cinetica e potenziale:

\[
E_{\text{tot}} = K + U = \frac{p^2}{2m} + (-e) [V(r) - V(\infty)] = \frac{p^2}{2m} - e \frac{e}{4\pi \epsilon_0 r} = \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 r}
\]

che ha un minimo a distanza finita! *La materia non collassa.*

La stima del raggio dell’atomo di idrogeno fornisce (dal minimo di \( E \))

\[
r_{\text{min}} = \frac{4\pi \epsilon_0 \hbar^2}{me^2} \simeq 0.528 \text{Å}
\]

E l’energia corrispondente:

\[
E_{\text{min}} = E(r_{\text{min}}) \simeq -13.6 \text{ eV}
\]

negativa: stato legato.

1 eV = 1.60219 \cdot 10^{-19} J

---

**Indeterminazione energia/tempo**

La particella/onda evolve (“si propaga”) anche nel tempo. Quindi, a \( x \) fissata,

\[
2\pi \Delta \nu \Delta t \geq 1 \quad \rightarrow \quad \Delta E \Delta t \geq \hbar
\]

Uno stato con energia estremamente ben definita esiste per un tempo lungo. (“la frequenza deve essere ben definita”)

Uno stato che decade in tempi brevi non ha energia ben definita (“sovrapposizione di onde a varie frequenze”)

---

**Esercizio:** mostrare che in meccanica classica l’energia non è limitata inferiormente (ovvero, l’elettrone collassa nell’origine). Suggerimento: scrivere \( p \) (in meccanica classica) per un moto circolare
Indeterminazione energia/tempo

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar$$

Si può ottenere:

1] per analogia con il pacchetto gaussiano, per cui si può dimostrare che

$$\Delta \omega \Delta t \geq 1$$

2] partendo dal principio di indeterminazione posizione/momento:

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar$$

usando la definizione di velocità di gruppo:

$$v_g = \frac{\Delta \omega}{\Delta k}$$

il concetto di posizione per una particella:

$$\Delta x = v_g \Delta t$$

e la relazione numero d’onda - momento:

$$\Delta p = \hbar \Delta k$$

Riassunto

Gli esperimenti indicano che una teoria quantistica dovrà contenere:

- Natura ondulatoria e corpuscolare.
- Probabilità.
- Stati stazionari, energie discrete per stati legati.
- Indeterminazione.